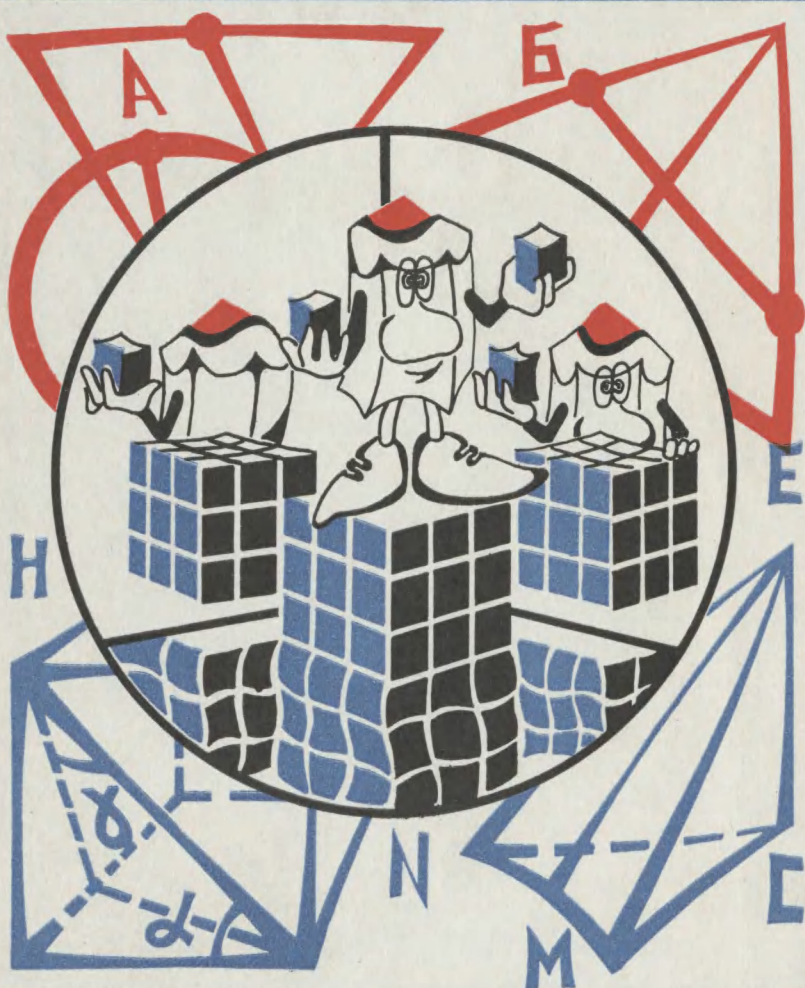


КОГДА  
СДЕЛАНЫ  
УРОКИ

Э. Г. ГОТМАН

З. А. СКОПЕЦ

# ЗАДАЧА ОДНА— РЕШЕНИЯ РАЗНЫЕ



Э. Г. ГОТМАН

З. А. СКОПЕЦ

# ЗАДАЧА ОДНА— РЕШЕНИЯ РАЗНЫЕ

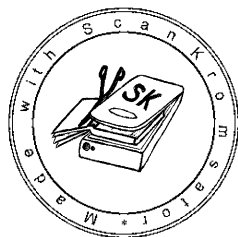


**Для старшего школьного возраста**

КИЕВ  
„РАДЯНСЬКА ШКОЛА“  
1988

Рецензенты: *И. В. Баум*, кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики Симферопольского университета; *Н. П. Грицаенко*, преподаватель Днепропетровского университета; *В. А. Мишин*, учитель математики.

Художник-оформитель *Н. С. Кобрин*



Scan AAW

**Готман Э. Г., Скопец З. А.**

Г73      Задача одна — решения разные.— К.: Рад. шк., 1988.— 173 с.— (Сер. «Когда сделаны уроки»).

ISBN 5—330—00346—6.

В книге помещена система нестандартных планиметрических и стереометрических задач из всех разделов школьного курса геометрии. Каждая из более чем 200 приведенных задач снабжена двумя-тремя принципиально различными рациональными решениями, иллюстрирующими важнейшие общие методы решения задач, принятые в математике. Предлагаемые решения анализируются, сравниваются и обобщаются.

Г 4802020000—346  
М210(04)—88      КУ—№9—40—1988

ББК 22.151.0

ISBN 5—330—00346—6

© Издательство «Радянська школа», 1988



«Математика ум в порядок приводит» — эти слова принадлежат великому М. В. Ломоносову. Что же он имел в виду?

Дело в том, что одним из наиболее важных качеств мышления является его логичность, способность делать из правильных посылок (суждений, утверждений) правильные выводы, находить правильные следствия из имеющихся фактов.

О человеке, у которого хорошо развито логическое мышление, говорят, что он основательно мыслит, дисциплинированно рассуждает.

И вот оказывается, что это ценнейшее качество возникает и развивается главным образом в процессе изучения математики, в частности, в процессе решения математических задач. Ведь математика это практическая логика, в ней каждое новое положение получается с помощью строго обоснованных рассуждений на основе ранее известных положений, то есть строго доказывается. Ломоносов приведенными выше словами подчеркнул именно эту особенность математики.

Изучение математики формирует не только логическое мышление, но и много других качеств человека: сообразительность, настойчивость, аккуратность, критичность и др.

Очень важным среди них является пространственное воображение, умение представить в уме (вообразить) какие-то предметы, фигуры и при этом увидеть их не только неподвижными, но и в изменении, — представить, что произойдет, если их как-то переместить, повернуть и т. д. При изучении математики, в особенности при решении геометрических задач вам все время приходится делать это, и тем самым у вас постепенно развивается эта важная способность.

Эта же способность представить в уме — вообразить — важна и для планирования своей работы, своих действий с тем, чтобы они были наиболее разумными, рациональными и безошибочными.

Изучение математики, решение математических задач развивают, помимо пространственного воображения, и способность до-

гадываться, угадывать заранее результат, способность разумно искать правильный путь в самых запутанных условиях.

Прочтя задачу и еще не производя никаких действий, вы должны стремиться к тому, чтобы научиться сразу видеть, что тот или иной способ непригоден для ее решения, а вот какой-то другой способ может быть использован. Такое умение вырабатывается в процессе решения одной и той же задачи разными способами. Именно поэтому часто полезнее решить одну и ту же задачу тремя различными способами, чем решить три-четыре различные задачи.

Решая одну и ту же задачу различными методами, можно лучше понять специфику того или иного метода, его преимущество и недостатки в зависимости от содержания задачи.

Нередко найденный способ решения может быть в дальнейшем использован для решения более трудных задач, сходных с решенной задачей.

Отметим еще, что решение задач, допускающих ряд решений,— увлекательная работа, требующая знания всех разделов школьной математики.

Для решения предлагаемых задач хотя бы одним способом не требуется знаний, выходящих за пределы школьной программы по математике. Большинство задач по планиметрии доступно восьмиклассникам. Они могут быть решены с помощью элементарных геометрических приемов. Позднее, в старших классах, мы рекомендуем вернуться к ним еще раз и решать их с применением тригонометрии, векторов и других средств.

Некоторые задачи можно решить проще, если дополнительно знать отдельные методы и приемы, которые в школе не изучаются. Для учащихся, желающих овладеть ими, в начале каждой главы помещен необходимый теоретический материал, даются разъяснения о методах решения и приводятся типичные примеры.

Кроме решений, предлагаемых авторами, несомненно имеются еще и другие, может быть, более интересные решения. Предполагается, что читатель будет настойчиво пытаться отыскать рациональное решение задачи, и только после этого обратится к указаниям, помещенным в конце каждого раздела сборника.

Предлагается справочный материал — перечень основных обозначений и формул по геометрии (многие из них вошли в сборник как задачи на доказательство).

# ПЛАНИМЕТРИЯ



## ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

*Аффинными* называются свойства плоских фигур, которые сохраняются при параллельном проектировании на плоскость. К ним относятся принадлежность точек одной прямой, параллельность прямых, отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, отношение площадей. Например, хорошо известная из школьного курса геометрии теорема о средней линии трапеции носит аффинный характер. А такие свойства фигур, как величины углов или отношения непараллельных отрезков, при параллельном проектировании не сохраняются. Следовательно, они не являются аффинными и не используются при решении задач этой главы.

Рассмотрим основные методы и приемы решения аффинных задач.

При решении геометрических задач с аффинным содержанием применяются геометрические преобразования: параллельный перенос, центральная симметрия и гомотетия. Используются теоремы о средней линии треугольника, об отрезках, отсекаемых на сторонах угла параллельными прямыми, и аналогичные им теоремы.

При вычислении отношения площадей многоугольников удобно пользоваться следующими леммами:

1) Если вершины  $C$  и  $C_1$  треугольников  $ABC$  и  $ABC_1$  лежат по одну сторону от прямой  $AB$ , то эти треугольники равновелики тогда и только тогда, когда  $CC_1 \parallel AB$ .

2) Если точка  $M$  лежит на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$ , то  $\frac{S_{ACM}}{S_{BCM}} = \frac{AM}{BM}$ .

3) Если точки  $B_1$  и  $C_1$  принадлежат сторонам  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  (или их продолжениям), то

$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AB \cdot AC}.$$

Большинство аффинных задач решается с помощью векторов. При этом используются действия сложения и вычитания векторов, умножения вектора на число. Скалярное умножение векторов не применяется для решения задач этого типа.

Приведем основные формулы и соотношения, используемые при решении аффинных задач.

1) **Правило сложения векторов:**  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ .

2) **Правило вычитания векторов:**  $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ , где  $O$  — произвольная точка.

3) **Условие принадлежности трех точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  одной прямой:** а)  $\overline{BC} = k\overline{BA}$ ; б)  $\overline{OC} = k\overline{OA} + (1-k)\overline{OB}$ ; в)  $\overline{OC} = k\overline{OA} + l\overline{OB}$ , где  $k + l = 1$ .

Равенства б) и в) являются модификацией записи равенства а). Согласно правилу вычитания векторов из равенства а) следует, что  $\overline{OC} - \overline{OB} = k(\overline{OA} - \overline{OB})$ , или  $\overline{OC} = k\overline{OA} + (1-k)\overline{OB}$ , и наоборот, из последних равенств следует равенство а).

4) **Условие параллельности отрезков  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$ :**  $\overline{AB} = k\overline{CD}$ .

Пусть  $\bar{a} = k\bar{b}$ . При  $\bar{b} \neq \bar{0}$  это равенство записывают также в виде  $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = k$ . Число  $k$  называют отношением коллинеарных векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ .

Если  $\bar{a} = k\bar{b}$  и  $k \neq 0$ , то  $\bar{b} = \frac{1}{k}\bar{a}$ . Иногда пишут:  $\bar{b} = \frac{\bar{a}}{k}$ , считая, что  $\frac{\bar{a}}{k} = \frac{1}{k}\bar{a}$ .

5) Если  $C$  — середина отрезка  $AB$ , то: а)  $\overline{AC} = \overline{CB}$ ; б)  $\overline{OC} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$ .

6) **Формула деления отрезка  $AB$  в данном отношении:** если  $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = k$ , то  $\overline{OC} = \frac{\overline{OA} + k\overline{OB}}{1 + k}$ .

Говорят, что точка  $C$  делит отрезок  $AB$  в данном отношении  $k$ , если  $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = k$ , или  $\overline{AC} = k\overline{CB}$  ( $k \neq -1$ ).

Если точка  $C$  лежит внутри отрезка  $AB$ , то векторы  $\overline{AC}$  и  $\overline{CB}$  направлены одинаково. Следовательно, число  $k$  — положительное и равно отношению длин отрезков  $AC$  и  $CB$ . В частности, если  $C$  — середина отрезка  $AB$ , то  $k = 1$ .

Если же точка  $C$  лежит на прямой  $AB$  вне отрезка  $AB$ , то векторы  $\overline{AC}$  и  $\overline{CB}$  направлены противоположно, и число  $k$  — отрицательное.

**Доказательство формулы 6).** Пусть  $\overline{AC} = k\overline{CB}$ . Согласно правилу вычитания векторов, при любом выборе точки  $O$  имеем:

$$\overline{OC} - \overline{OA} = k(\overline{OB} - \overline{OC}),$$

или

$$(1 + k)\overline{OC} = \overline{OA} + k\overline{OB}.$$

Тогда

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OA} + k\overline{OB}}{1 + k}.$$

7) **Единственность разложения вектора по двум неколлинеарным векторам:** если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  неколлинеарны, то из равенства  $x\vec{a} + y\vec{b} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$  следует, что  $x = x_1$  и  $y = y_1$ .

Векторными обозначениями удобно пользоваться при изучении гомотетии.

**Гомотетией с центром  $O$  и коэффициентом  $k \neq 0$  называется такое преобразование плоскости, при котором произвольная точка  $X$  отображается на такую точку  $X'$ , что  $\overline{OX'} = k\overline{OX}$ .**

Из определения следует, что при  $k > 0$  точки  $X$  и  $X'$  лежат на прямой  $OX$  по одну сторону от центра гомотетии, а при  $k < 0$  — по разные его стороны.

Пусть  $A'$  и  $B'$  — образы точек  $A$  и  $B$  при гомотетии с центром  $O$  и произвольным коэффициентом  $k$ . Тогда  $\overline{OA'} = k\overline{OA}$  и  $\overline{OB'} = k\overline{OB}$ . Следовательно,

$$\overline{A'B'} = \overline{OB'} - \overline{OA'} = k(\overline{OB} - \overline{OA}) = k\overline{AB}.$$

Итак,  $\overline{A'B'} = k\overline{AB}$ . Из этого равенства вытекают все важнейшие свойства гомотетии.



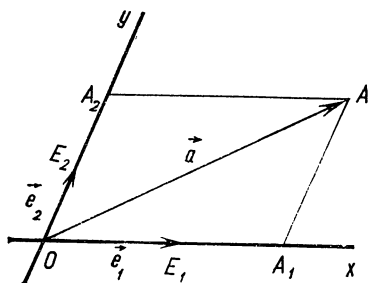


Рис. 1

Одним из наиболее универсальных методов решения геометрических задач является координатный метод.

Для решения аффинных задач используют не прямоугольную декартову систему координат, изучаемую в школе, а общую *декартову, или аффинную, систему координат*. Рассмотрим эту систему и выведем основные формулы, необходимые для решения задач.

Возьмем на плоскости некоторую точку  $O$  и отложим от нее два неколлинеарных вектора  $\overline{OE}_1 = \bar{e}_1$  и  $\overline{OE}_2 = \bar{e}_2$  (рис. 1).

Пусть  $\bar{a}$  — произвольный вектор. Отложив его от точки  $O$ , получим точку  $A$ , такую, что  $\overline{OA} = \bar{a}$ . Через точку  $A$  проведем прямые параллельно прямым  $OE_1$  и  $OE_2$ , пересекающие прямые  $OE_2$  и  $OE_1$  в точках  $A_2$  и  $A_1$ . Согласно правилу сложения векторов имеем:

$$\overline{OA} = \overline{OA}_1 + \overline{OA}_2.$$

Но вектор  $\overline{OA}_1$  коллинеарен вектору  $\bar{e}_1$ . Поэтому  $\overline{OA}_1 = x\bar{e}_1$ . Аналогично  $\overline{OA}_2 = y\bar{e}_2$ . Таким образом, получаем равенство

$$\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2.$$

Из единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам следует, что числа  $x$  и  $y$  определяются однозначно.

Заданные векторы  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$  называют *базисными*, или *координатными*, а числа  $x$  и  $y$  — *координатами вектора  $\bar{a}$  в базисе  $(\bar{e}_1; \bar{e}_2)$* . Краткая запись:  $\bar{a} = (x; y)$ . Очевидно,  $\bar{e}_1 = (1; 0)$  и  $\bar{e}_2 = (0; 1)$ .

Действия над векторами, заданными своими координатами, выполняются по следующим правилам:

**Если  $\bar{a} = (a_1; a_2)$  и  $\bar{b} = (b_1; b_2)$ , то**

1)  $\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2);$

2)  $\bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2);$

3)  $k\bar{a} = (ka_1; ka_2).$

Точка  $O$  и базисные векторы  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$  задают на плоскости аффинную систему координат. Пусть  $A$  — произвольная точка плоскости.

*Координатами точки  $A$  в данной аффинной системе координат называют координаты вектора  $\overline{OA}$ .*

Если  $\overline{OA} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$ , то точка  $A$  имеет координаты  $x$  и  $y$ . Записывается это так:  $A(x; y)$ . Точку  $O$  называют *началом координат*, направленные прямые  $OE_1$  и  $OE_2$  — *осями координат*. Точки  $E_1$  и  $E_2$  имеют координаты:  $E_1(1; 0)$ ,  $E_2(0; 1)$ .

В частном случае, когда  $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = 1$  и  $(\bar{e}_1; \bar{e}_2) = 90^\circ$ , система координат называется прямоугольной декартовой системой координат.

Используя определение координат точки и правила действий над векторами в координатах, получаем следующие формулы:

1) Если на плоскости даны две точки  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$ , то координаты вектора  $\overline{AB}$  вычисляются так:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1).$$

2) Если точка  $C$  делит отрезок  $AB$  в данном отношении  $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = k$ , то

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OA} + k\overline{OB}}{1 + k},$$

и координаты точки  $C$  определяются формулами:

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}.$$

3) Если точка  $C$  делит отрезок  $AB$  пополам, то  $k = 1$ . Поэтому координаты середины отрезка  $AB$  вычисляются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Рассмотрим различные способы задания прямой на плоскости.

Пусть требуется написать уравнение прямой  $l$ , заданной в некоторой аффинной системе координат точкой  $M_0(x_0; y_0)$  и ненулевым вектором  $\vec{a} = (\alpha; \beta)$ , параллельным прямой  $l$  (рис. 2). Вектор  $\vec{a}$  будем называть направляющим вектором прямой  $l$ .

Произвольная точка  $M(x; y)$  принадлежит прямой  $l$  тогда и только тогда, когда векторы  $\overline{M_0M}$  и  $\vec{a}$  коллинеарны, то есть когда выполняется равенство

$$\overline{M_0M} = t\vec{a},$$

или

$$\overline{OM} = \overline{OM_0} + t\vec{a},$$

где  $t$  — некоторое число (параметр). Это соотношение в координатах принимает вид:

$$x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t.$$

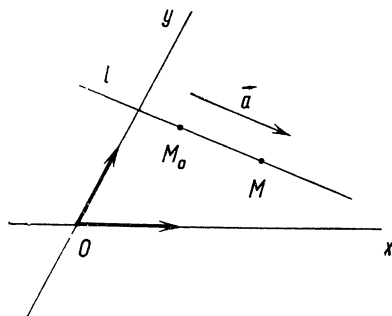


Рис. 2

Полученные уравнения называют *параметрическими уравнениями прямой*.

Если прямая  $l$  параллельна оси  $Oy$ , то  $\alpha = 0$  и уравнение прямой принимает вид

$$x = x_0,$$

а второе уравнение становится лишним.

Аналогично уравнение прямой, параллельной оси  $Ox$ :

$$y = y_0.$$

При  $\alpha \neq 0$  и  $\beta \neq 0$ , исключив из системы параметр  $t$ , получим уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}.$$

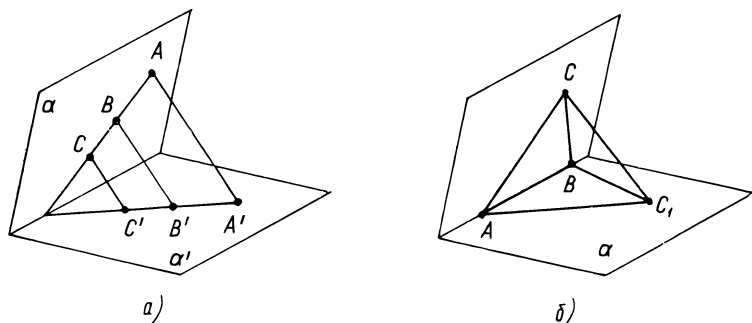


Рис. 3

При  $\alpha \neq 0$  это уравнение можно записать так:

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

где  $k = \frac{\beta}{\alpha}$ . Число  $k$  называют *угловым коэффициентом прямой*.

Если прямая  $l$  задана двумя точками  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$ , то вектор  $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$  является направляющим вектором прямой, и ее уравнение легко записать.

В частности, если прямая проходит через точки  $A(a; 0)$  и  $B(0; b)$ , отличные от начала координат, то уравнение ее принимает вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Это уравнение называют *уравнением прямой в отрезках*.

Рассмотрим еще один метод решения аффинных задач, который назовем *методом параллельного проектирования*.

Пусть в пространстве даны две плоскости  $\alpha$  и  $\alpha'$  и некоторая прямая  $l$ , пересекающая каждую из них (рис. 3, а). Через любую точку  $A$  плоскости  $\alpha$  проведем прямую, параллельную  $l$ . Эта пря-

мая пересечет плоскость  $\alpha'$  в некоторой точке  $A'$ . Точка  $A'$  называется *параллельной проекцией точки  $A$*  при параллельном проектировании на плоскость  $\alpha'$  в направлении  $l$ .

**Проекцией фигуры  $F$  называется множество  $F'$  проекций всех ее точек.**

**При параллельном проектировании плоскости на плоскость:**

1) **Проекция прямой есть прямая, а проекция отрезка — отрезок.**

2) **Проекции параллельных прямых параллельны.**

3) **Отношение длин проекций двух отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению длин самих отрезков.**

4) **Отношение площадей проекций двух фигур равно отношению площадей проектируемых фигур.**

Очевидно, если фигура  $F'$  является образом фигуры  $F$  при параллельном проектировании плоскости  $\alpha$  на плоскость  $\alpha'$ , то при параллельном проектировании плоскости  $\alpha'$  на плоскость  $\alpha$  в противоположном направлении, фигура  $F$  будет проекцией фигуры  $F'$ . Следовательно, те свойства, которые сохраняются при параллельном проектировании, являются общими для обеих фигур. Иначе говорят, что фигуры *обладают одинаковыми аффинными свойствами*.

Легко доказать, что **всякий треугольник можно параллельно спроектировать на плоскость так, что его проекцией будет треугольник любого вида, то есть подобный любому другому заданному треугольнику**.

Действительно, пусть даны два треугольника  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ . Проведем через прямую  $AB$  плоскость  $\alpha$ , не совпадающую с плоскостью треугольника  $ABC$  (рис. 3, б). В плоскости  $\alpha$  построим на стороне  $AB$  треугольник  $ABC'$ , подобный треугольнику  $A_1B_1C_1$ . Если треугольник  $ABC$  спроектировать на плоскость  $\alpha$  в направлении прямой  $CC_1'$ , то получим треугольник  $ABC'$  (подобный треугольнику  $A_1B_1C_1$ ).

В частности, **всякий треугольник можно спроектировать так, что его проекцией будет равносторонний треугольник**.

Поскольку параллелограмм диагональю разбивается на два треугольника симметричных относительно центра параллелограмма, то доказанную теорему легко распространить и на параллелограмм. Итак, если в задаче требуется доказать, что треугольник обладает некоторым аффинным свойством, то вместо произвольного треугольника можно взять другой, более простой, например, равносторонний или прямоугольный, и для него доказать существование требуемого свойства. Тем самым будет установлено, что этим свойством обладает любой треугольник. Аналогично, вместо параллелограмма общего вида можно взять какой-нибудь частный его вид, например

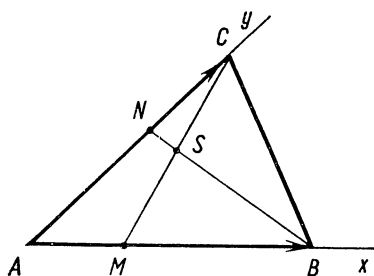


Рис. 4

квадрат. После такой замены часто получается более простая метрическая задача, для решения которой можно использовать любые известные из курса геометрии теоремы и формулы.

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ АФФИННЫХ ЗАДАЧ

**Пример 1.** На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  даны соответственно точки  $M$  и  $N$ , такие, что

$\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NA} = \frac{1}{2}$ . В каком отношении точка  $S$  пересечения отрезков  $BN$  и  $CM$  делит каждый из этих отрезков?

**Решение 1.** Для того чтобы вычислить отношение  $\frac{CS}{SM}$ , через точку  $M$  проведем прямую, параллельную прямой  $BN$ , и точку пересечения ее со стороной  $AC$  обозначим через  $L$  (рис. 4). Так как  $AM = \frac{1}{2} MB$ , то  $AL = \frac{1}{2} LN$ . Согласно условию задачи,  $AL + LN = \frac{2}{3} AC$ , или  $\frac{3}{2} LN = \frac{2}{3} AC$ , то есть  $LN = \frac{4}{9} AC$ . Ввиду того, что  $CN = \frac{1}{3} AC$ , имеем  $\frac{CN}{LN} = \frac{3}{4}$ . А так как  $LM \parallel NS$ , то и  $\frac{CS}{SM} = \frac{3}{4}$ .

Далее, учитывая, что треугольники  $CNS$  и  $CLM$ ,  $ALM$  и  $ANB$  — гомотетичны, находим, что  $NS = \frac{3}{7} LM$ ,  $BN = 3 LM$ . Отсюда  $NS = \frac{1}{7} BN$ . Значит,  $SB = \frac{6}{7} BN$  и  $\frac{NS}{SB} = \frac{1}{6}$ .

Теперь решим эту задачу с помощью векторов, а затем координатным методом.

**Решение 2.** Обозначим  $\frac{CS}{SM} = \alpha$  и  $\frac{NS}{SB} = \beta$  (рис. 4). Для того чтобы вычислить  $\alpha$  и  $\beta$ , выразим вектор  $\overline{AS}$  двумя способами через векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ .

По формуле деления отрезка в данном отношении имеем:

$$\overline{AS} = \frac{\overline{AC} + \alpha \overline{AM}}{1 + \alpha} \quad \text{и} \quad \overline{AS} = \frac{\overline{AN} + \beta \overline{AB}}{1 + \beta}.$$

Так как согласно условию задачи  $\overline{AM} = \frac{1}{3} \overline{AB}$  и  $\overline{AN} = \frac{2}{3} \overline{AC}$ ,

то

$$\overline{AS} = \frac{\overline{AC} + \frac{1}{3} \alpha \overline{AB}}{1 + \alpha} \quad \text{и} \quad \overline{AS} = \frac{\frac{2}{3} \overline{AC} + \beta \overline{AB}}{1 + \beta}.$$

В силу единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$  получим:

$$\frac{\alpha}{3(1+\alpha)} = \frac{\beta}{1+\beta},$$

$$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{2}{3(1+\beta)}.$$

Откуда

$$\alpha = \frac{3}{4}, \quad \beta = \frac{1}{6}.$$

**Решение 3.** Введем на плоскости аффинную систему координат с началом в точке  $A$  и координатными векторами  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ . Тогда имеем:  $B(1; 0)$ ,  $C(0; 1)$  и, согласно условию задачи,  $M\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ ,  $N\left(0; \frac{2}{3}\right)$ . Запишем уравнения прямых  $CM$  и  $BN$ :

$$\begin{cases} 3x + y = 1, \\ x + \frac{3}{2}y = 1. \end{cases}$$

Откуда

$$x = \frac{1}{7}, \quad y = \frac{4}{7}.$$

Значит,  $S\left(\frac{1}{7}; \frac{4}{7}\right)$ . Теперь легко находим искомые отношения:

$$\frac{CS}{SM} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{7}} = \frac{3}{4}, \quad \frac{NS}{SB} = \frac{\frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{1}{6}.$$

Сопоставляя векторное решение задачи с координатным, замечаем, что различие между ними незначительное. Оба решения выгодно отличаются от элементарно-геометрического тем, что не потребовалось придумывать вспомогательных построений.

Решая задачу векторным способом, мы выбрали базис, состоящий из двух неколлинеарных векторов  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ , записали равенства, выражающие условия принадлежности точки  $S$  прямым  $CM$  и  $BN$ , затем выразили векторы, входящие в эти равенства, через базисные. Получив два разложения вектора  $\overline{AS}$ , приравняли коэффициенты при одних и тех же базисных векторах. Решение полученной системы уравнений и дало ответ на вопрос задачи. По такому же плану решаются все задачи подобного типа.

Координатное решение еще проще. Сначала мы наиболее естественным образом выбрали аффинную систему координат. Зная координаты точек  $B$ ,  $C$ ,  $M$  и  $N$ , записали уравнения прямых  $CM$  и  $BN$ . Решив полученную систему уравнений, нашли координаты точки пересечения этих прямых. Таким образом, геометрическая задача решается средствами алгебры.

Простое и экономное решение задачи можно получить, если знать *теорему Менелая*<sup>1</sup> (см. задачу 12, с. 18).

**Решение 4.** Применим теорему Менелая к треугольнику  $АСМ$  и секущей  $ВN$  (рис. 4). Заменяя отношение коллинеарных векторов отношением их длин, получим:

$$\frac{CS}{SM} \cdot \frac{MB}{BA} \cdot \frac{AN}{NC} = 1,$$

или

$$\frac{CS}{SM} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 1,$$

откуда

$$\frac{CS}{SM} = \frac{3}{4}.$$

Отношение  $\frac{NS}{SB}$  можно вычислить аналогично, применив теорему Менелая к треугольнику  $ABN$ .

При решении некоторых других задач с успехом может быть использована *теорема Чебы*<sup>2</sup> (см. задачу 13, с. 18). Теоремы Менелая и Чебы не входят в школьную программу по математике, однако их нетрудно изучить самостоятельно.

**Пример 2.** На сторонах  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , такие, что

$$\frac{AC_1}{AB} = \frac{BA_1}{BC} = \frac{CA_1}{CA} = k.$$

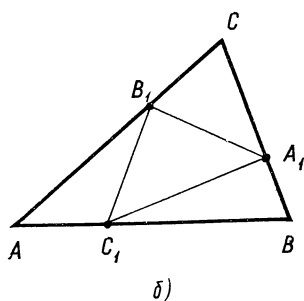
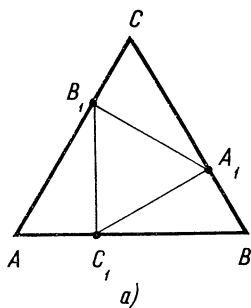


Рис. 5

Какую часть площади треугольника  $ABC$  составляет площадь треугольника  $A_1B_1C_1$ ?

**Решение 1.** Так как задача имеет аффинное содержание, то достаточно решить ее для равностороннего треугольника (рис. 5, а). В таком случае треугольники  $AB_1C_1$ ,  $BA_1C_1$ ,  $CA_1B_1$  равны

<sup>1</sup> Менелай Александрийский (1—2 в. н. э.) — греческий математик и астроном.

<sup>2</sup> Чева Джованни (1648—1734) — итальянский инженер-гидравлик и геометр.

(по двум сторонам и углу между ними). Поэтому  $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1$ , то есть треугольник  $A_1B_1C_1$  также является равносторонним.

Пусть  $AB = 1$ , тогда  $AC_1 = k$  и  $AB_1 = 1 - k$ . По теореме косинусов имеем:

$$B_1C_1^2 = 3k^2 - 3k + 1.$$

Отношение площадей треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $ABC$  (обозначим их через  $S_1$  и  $S$ ) равно отношению квадратов длин их сторон. Следовательно,

$$\frac{S_1}{S} = 3k^2 - 3k + 1 = 3\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

Задача решена. Применяв метод проектирования, мы упростили чертеж и увидели, что если  $ABC$  — произвольный треугольник, то треугольники  $AB_1C_1$ ,  $BA_1C_1$  и  $CA_1B_1$  должны быть равновеликими (рис. 5, б).

Задачу можно решить, сравнив площадь одного из этих треугольников с площадью треугольника  $ABC$ .

**Решение 2.** Пусть  $ABC$  — произвольный треугольник. Так как треугольники  $AB_1C_1$  и  $ABC$  имеют общий угол  $A$ , то согласно лемме 3 (см. с. 6) имеем:

$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AC \cdot AB} = k(1 - k),$$

или

$$S_{AB_1C_1} = k(1 - k)S.$$

Аналогично найдем, что  $S_{BA_1C_1} = S_{CA_1B_1} = k(1 - k)S$ . Следовательно,

$$S_1 = S - 3S_{AB_1C_1} = (3k^2 - 3k + 1)S,$$

или

$$\frac{S_1}{S} = 3k^2 - 3k + 1.$$

**Пример 3.** На сторонах  $CA$  и  $CB$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $M$  и  $N$ , такие, что  $\frac{CM}{CA} = m$  и  $\frac{CN}{CB} = n$ . Медиана  $CD$  треугольника пересекает отрезок  $MN$  в точке  $E$ . Вычислить отношение  $\frac{ME}{EN}$ .

**Решение 1.** Так как задача имеет аффинное содержание, то достаточно решить ее для какого-нибудь частного случая.

Треугольник  $ABC$  будем считать равнобедренным (рис. 6). Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является и его биссектрисой, поэтому  $CE$  — биссектриса треугольника  $CMN$ . Учитывая, что  $CM = m \cdot CA$  и  $CN = n \cdot CB = n \cdot CA$ , по теореме о биссектрисе треугольника имеем:

$$\frac{ME}{EN} = \frac{CM}{CN} = \frac{m}{n}.$$



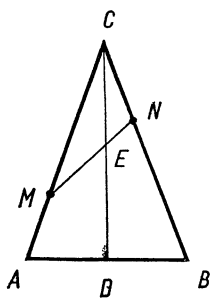


Рис. 6

Таким образом, с помощью метода параллельного проектирования задача решается устно.

Простое элементарное решение этой задачи можно получить с использованием площадей треугольников (хотя в задаче о площадях ничего не говорится).

**Решение 2.** Обозначим площади треугольников  $CME$  и  $CEN$  через  $S_1$  и  $S_2$ , площадь треугольника  $ABC$  — через  $2S$ . Тогда площадь каждого из треугольников  $ACD$  и  $BCD$  равна  $S$ . Согласно лемме 2 (см. с. 6) имеем:

$$\frac{ME}{EN} = \frac{S_1}{S_2}.$$

Пользуясь леммой 3 (см. с. 6), находим:

$$\frac{S_1}{S} = m \cdot \frac{CE}{CD}, \quad \frac{S_2}{S} = n \cdot \frac{CE}{CD}.$$

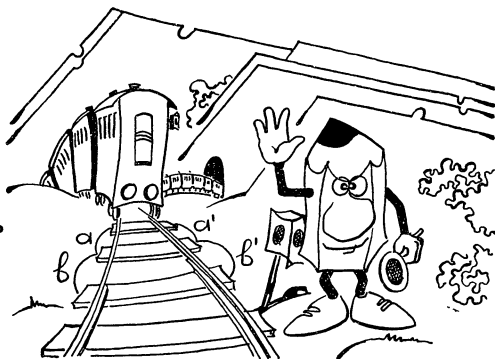
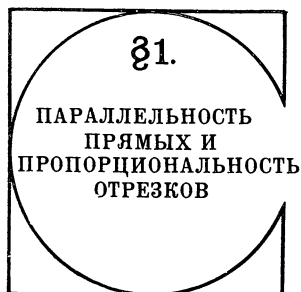
Разделив первое из этих равенств на второе, получим:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}.$$

Следовательно,

$$\frac{ME}{EN} = \frac{m}{n}.$$

Прием сравнения площадей является эффективным при решении целого ряда геометрических задач.



### Задачи на доказательство

1. Докажите, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

2. Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции принадлежат одной прямой.

3. Прямая, проведенная параллельно основаниям трапеции  $ABCD$ , пересекает ее боковые стороны  $AD$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$ , а диагонали  $AC$  и  $BD$  — в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $MP = QN$ .

4. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон и середины диагоналей четырехугольника, имеют общую середину.

5. На сторонах  $AB$  и  $DC$  четырехугольника  $ABCD$  взяты точки  $M$  и  $N$ , такие, что  $\frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DC} = k$ . Точки  $P$ ,  $Q$ ,  $S$  — соответственно середины отрезков  $AD$ ,  $BC$  и  $MN$ . Докажите, что эти точки принадлежат одной прямой и что  $\frac{PS}{PQ} = k$ .

6. Параллелограмм вписан в другой параллелограмм. Докажите, что их центры совпадают.

7. Прямая, не проходящая через центр параллелограмма  $ABCD$ , пересекает его стороны  $AD$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$ , а диагонали  $AC$  и  $BD$  — в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что если  $MP = QN$ , то  $MN \parallel AB$ .

8. На боковых сторонах  $AD$  и  $BC$  трапеции  $ABCD$  взяты точки  $M$  и  $N$ , такие, что  $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NB}$ . Прямая  $MN$  пересекает диагонали  $AC$  и  $BD$  соответственно в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $MP = QN$ .

9. Через вершину  $A$  параллелограмма  $ABCD$  проведена произвольная прямая, пересекающая диагональ  $BD$  в точке  $P$ , прямую  $CD$  — в точке  $M$  и прямую  $BC$  — в точке  $N$ . Докажите, что

$$\frac{AP}{AM} + \frac{AP}{AN} = 1.$$

10. Дана трапеция  $ABCD$ . На боковых сторонах  $AD$  и  $BC$  взяты точки  $E$  и  $F$ , такие, что  $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} = \frac{m}{n}$ . Докажите, что  $EF \parallel AB$  и

$$EF = \frac{na + mb}{m + n},$$

где  $a = AB$ ,  $b = CD$ .

11. Точки  $M$  и  $N$  — середины оснований  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$ . Прямая  $MN$  пересекает диагональ  $AC$  в точке  $Q$  и прямую  $AD$  — в точке  $P$ . Докажите, что

$$PQ = \frac{2mn}{m + n},$$

где  $m = PM$ ,  $n = PN$ .

12. (Теорема Менелая). На прямых  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ , определяющих треугольник  $ABC$ , даны точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Докажите, что эти точки принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = -1.$$

13. (Теорема Чебы). На прямых  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ , определяющих треугольник  $ABC$ , даны точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = 1.$$

14. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и каждая из них делится этой точкой в отношении  $2:1$ , считая от вершины.

15. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника.

16. Дан параллелограмм  $ABCD$ . Точка  $E$  и  $F$  — середины его сторон  $AB$  и  $CD$ . Докажите, что диагональ  $AC$  делится отрезками  $BF$  и  $DE$  на три равные части.

17. На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  взята произвольная точка  $K$ , и через нее проведены прямые параллельно медианам  $AA_1$  и  $BB_1$  треугольника. Эти прямые пересекают стороны  $AC$  и  $BC$  соответственно в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что медианы  $AA_1$  и  $BB_1$  разбивают отрезок  $MN$  на три равные части.

18. В треугольник  $ABC$  вписан параллелограмм  $CDEF$  так, что вершины  $D$ ,  $E$ ,  $F$  лежат соответственно на сторонах  $CA$ ,  $AB$ , и  $BC$ . Через середину  $M$  стороны  $AB$  проведена прямая  $CM$ , пересекающая прямую  $EF$  в точке  $K$ . Докажите, что  $ADFK$  — параллелограмм.

19. Даны два параллелограмма  $ABCD$  и  $AMPN$ , вершины  $M$  и  $N$  второго параллелограмма принадлежат сторонам  $AB$  и  $AD$  первого. Прямые  $BN$  и  $DM$  пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что точки  $C$ ,  $P$  и  $Q$  принадлежат одной прямой.

## Задачи на вычисление

20. Через середину  $M$  медианы  $CD$  треугольника  $ABC$  проведена прямая  $AM$ , пересекающая сторону  $BC$  в точке  $K$ . В каком отношении точка  $K$  делит сторону  $BC$ ?

21. Дан треугольник  $ABC$ . На сторонах  $CA$  и  $CB$  взяты соответственно точки  $M$  и  $N$  такие, что  $\frac{CM}{CA} = m$  и  $\frac{CN}{CB} = n$ . Медиана  $CD$  треугольника  $ABC$  пересекает отрезок  $MN$  в точке  $E$ . Найдите  $\frac{CE}{CD}$ .

22. На сторонах  $BC$  и  $CD$  параллелограмма  $ABCD$  заданы соответственно их середины  $M$  и  $N$ . Отрезки  $AN$  и  $DM$  пересекаются в точке  $K$ . В каком отношении точка  $K$  делит каждый из этих отрезков?

23. Через точку пересечения диагоналей трапеции  $ABCD$  параллельно ее основаниям проведена прямая, пересекающая боковые стороны  $AD$  и  $BC$  в точках  $E$  и  $F$ . Вычислите  $EF$ , если  $AB = a$  и  $CD = b$ .

24. Диагонали четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Через середину  $M$  стороны  $AB$  проведена прямая  $MO$ , пересекающая сторону  $CD$  в точке  $N$ . Найдите  $\frac{CN}{ND}$ , если  $AO = OC$  и  $\frac{BO}{OD} = 2$ .

## Контрольные вопросы

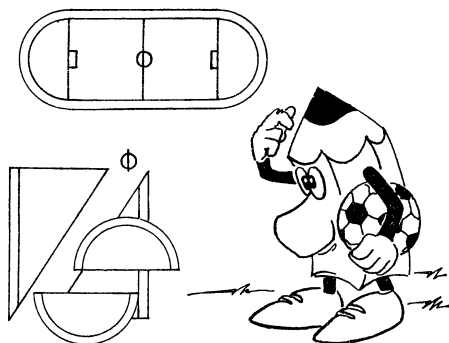
1) Какие свойства плоских фигур называются аффинными? Приведите примеры.

2) Какие из нижеследующих теорем являются аффинными, а какие — нет: теорема о средней линии треугольника, теорема об отношении отрезков, отсекаемых на сторонах угла параллельными прямыми, теорема Пифагора, теорема о сумме углов треугольника?

3) Какие геометрические преобразования применяются при решении задач с аффинным содержанием?

4) Какое преобразование называется симметрией относительно данной точки?

5) Какое преобразование называется гомотетией?



### Задачи на доказательство

25. На медиане  $CD$  треугольника  $ABC$  взята произвольная точка  $E$ . Прямые  $AE$  и  $BE$  пересекают стороны  $BC$  и  $CA$  треугольника соответственно в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что треугольники  $ACM$  и  $BCN$  равновелики.

26. Внутри параллелограмма  $ABCD$  взята произвольная точка  $M$ . Докажите, что сумма площадей треугольников  $ABM$  и  $CDM$  равна сумме площадей треугольников  $ADM$  и  $BCM$ .

27. Точка  $M$  — середина боковой стороны  $BC$  трапеции  $ABCD$ . Докажите, что площадь треугольника  $ADM$  составляет половину площади трапеции.

28. На средней линии трапеции  $ABCD$  взята произвольная точка  $M$ . Докажите, что сумма площадей треугольников  $ABM$  и  $CDM$  равна сумме площадей треугольников  $BCM$  и  $ADM$ .

29. Середины сторон четырехугольника последовательно соединены отрезками. Докажите, что площадь полученного четырехугольника равна половине площади данного четырехугольника.

### Задачи на вычисление

30. На сторонах параллелограмма  $ABCD$  взяты точки  $K, L, M, N$  такие, что

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{KB}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{NA}} = \frac{1}{2}.$$

Найдите отношение площади четырехугольника  $KLMN$  к площади параллелограмма  $ABCD$ .

31. Стороны  $AB, BC, CD, DA$  параллелограмма  $ABCD$  разделены точками  $K, L, M, N$  по его обходу в отношении  $1 : 2$ . Какую часть площади параллелограмма  $ABCD$  составляет площадь четырехугольника, ограниченного прямыми  $AL, BM, CN$  и  $DK$ ?

32. Дана трапеция  $ABCD$ . Через середину  $M$  боковой стороны  $BC$  проведена прямая, пересекающая сторону  $AD$  в точке  $N$ , такой, что четырехугольники  $ABMN$  и  $CDNM$  равновелики. Найдите  $\frac{AN}{ND}$ .

33. Диагонали трапеции  $ABCD$  с основанием  $AB$  пересекаются в точке  $O$ . Площади треугольников  $AOB$  и  $COD$  равны соответственно  $S_1$  и  $S_2$ . Найдите площадь трапеции.

34. Внутри треугольника  $ABC$  взята произвольная точка  $P$  и построены центроиды  $A_0, B_0, C_0$  треугольников  $BCP, CAP, ABP$ . Найдите площадь треугольника  $A_0B_0C_0$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна  $S$ .

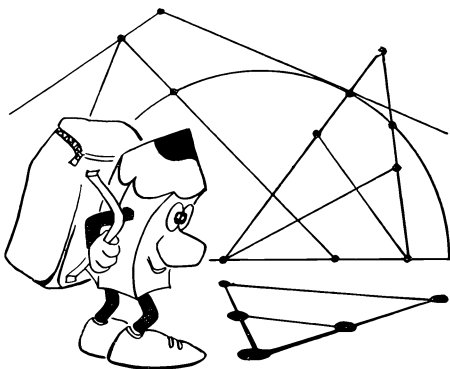
35. На сторонах  $BC, CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$ , такие, что

$$\frac{AC_1}{AB} = \frac{BA_1}{BC} = \frac{CB_1}{CA} = \frac{1}{3}.$$

Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна  $S$ .

### Контрольные вопросы

- 1) Что такое вектор?
- 2) Что значит: векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  одинаково направлены, противоположно направлены?
- 3) Какие векторы называются коллинеарными?
- 4) Дайте определения суммы и разности векторов.
- 5) Дайте определение умножения вектора на число.
- 6) Запишите условие параллельности отрезков  $AB$  и  $CD$  в векторной форме.
- 7) Запишите формулу деления отрезка  $AB$  в данном отношении.
- 8) Сформулируйте леммы, которые используются при вычислении площадей многоугольников.



36. Дан треугольник  $ABC$ . Стороны  $AC$  и  $CB$  делятся точками  $M$  и  $N$  в одном и том же отношении:  $\frac{AM}{MC} = \frac{CN}{NB} = k$ . Найдите геометрическое место середин отрезков  $MN$  для всех значений  $k$ .

37. Дан треугольник  $ABC$ . Строятся всевозможные отрезки  $MN$  с концами  $M$  и  $N$  на сторонах  $BC$  и  $AC$ , параллельные стороне  $AB$  треугольника. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей трапеций  $ABMN$ .

38. Даны прямая  $l$  и две точки  $A$  и  $B$ . Для каждой точки  $M$  прямой  $l$  строится точка  $M_1$ , симметричная  $M$  относительно  $A$ , и точка  $M_2$ , симметричная  $M$  относительно  $B$ . Найдите геометрическое место середин отрезков  $M_1M_2$ .

39. Дан треугольник  $ABC$ . Через точку  $M$ , принадлежащую стороне  $AB$ , проведены прямые, параллельные медианам  $AA_1$  и  $BB_1$  и пересекающие стороны  $BC$  и  $AC$  соответственно в точках  $P$  и  $Q$ . Найдите геометрическое место точек  $S$ , для которых  $MPSQ$  — параллелограмм.

### Контрольные вопросы

- 1) Запишите уравнение прямой, заданной двумя точками.
- 2) Запишите уравнение прямой в отрезках.
- 3) Выясните, при каких условиях два уравнения

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_1 = 0$$

определяют одну и ту же прямую, параллельные прямые?

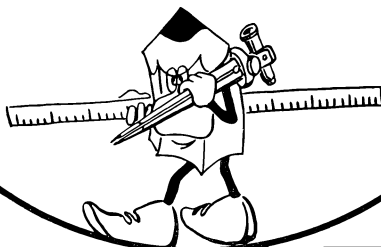
- 4) Что называется геометрическим местом точек?

# ПЛАНИМЕТРИЯ

## II

### глава

## МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ



## ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Метрическими называются свойства фигур, связанные с измерением.

Для решения метрических задач могут применяться элементарные геометрические приемы, геометрические преобразования, тригонометрические функции, векторы и координатный метод. Кроме параллельного переноса и гомотетии, которые применяются при решении задач предыдущей главы, часто оказываются полезными *осевая симметрия, поворот вокруг точки и центрально-подобный поворот.*

*Поворотом с центром  $O$  на угол  $\alpha$  в заданном направлении называется преобразование плоскости, при котором точка  $O$  остается неподвижной, а любая другая точка  $X$  отображается на такую точку  $X_1$ , что  $OX_1 = OX$  и  $\angle XOX_1 = \alpha$ .*

Поворот задают указанием центра, угла и направления поворота.

Можно доказать, что при повороте сохраняются расстояния между точками, следовательно, поворот есть движение.



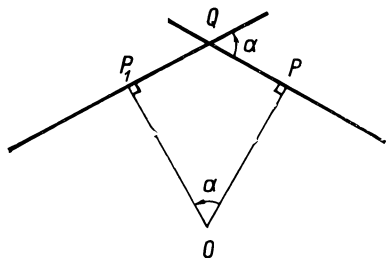


Рис. 7

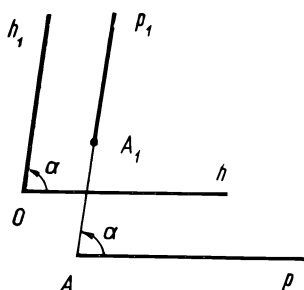


Рис. 8

Пусть требуется построить образ прямой  $l$  при повороте вокруг точки  $O$  на угол  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ) в заданном направлении, например против движения часовой стрелки. Для этого достаточно выбрать какие-либо две точки прямой, построить их образы и соединить их прямой.

Можно поступить и по-другому: провести к прямой  $l$  перпендикуляр  $OP$ , повернуть точку  $P$  на угол  $\alpha$  и через полученную точку  $P_1$  провести прямую  $l_1$ , перпендикулярную к  $OP_1$  (рис. 7). Очевидно, что угол между прямыми  $l$  и  $l_1$  равен углу поворота  $\alpha$  (если  $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ ) или  $180^\circ - \alpha$ . Для доказательства достаточно заметить, что  $\angle PQP_1 = 180^\circ - \alpha$ .

Рассмотрим аналогичное свойство для луча.

Докажем, что при повороте угол между лучом и его образом равен углу поворота. Пусть начало данного луча  $h$  совпадает с центром  $O$  поворота (рис. 8). Тогда это утверждение справедливо по определению поворота. Если точка  $A$  — начало луча  $p$ , отлична от точки  $O$ , то проведем луч  $h$  с началом в точке  $O$ , сонаправленный с лучом  $p$ . Любое движение плоскости отображает сонаправленные лучи на сонаправленные лучи. Поэтому образы  $h_1$  и  $p_1$  лучей  $h$  и  $p$  также сонаправлены. Угол между двумя направлениями не зависит от выбора лучей этих направлений. Значит, угол между лучами  $p$  и  $p_1$  равен углу между лучами  $h$  и  $h_1$ , то есть равен углу поворота  $\alpha$ .

Результат последовательного выполнения преобразований называют, как известно, *композицией* этих преобразований. Рассмотрим композицию гомотетии и поворота с общим центром. Пусть, например, при гомотетии с центром  $O$  и коэффициентом  $k$  точка  $A$  отображается на точку  $A_1$ , а при повороте вокруг точки  $O$  на угол  $\alpha$  точка  $A_1$  отображается на точку  $A_2$  (рис. 9). Их композиция отображает точку  $A$  на точку  $A_2$ . Нетрудно доказать, что результат не изменится, если сначала выполнить поворот, а потом — гомотетию.

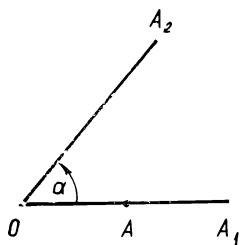


Рис. 9

*Композиция гомотетии и поворота с общим центром есть подобие.*

*Если коэффициент гомотетии положителен, то композицию называют центрально-подобным поворотом.*

При центрально-подобном повороте угол между любым лучом и его образом равен углу поворота. Это следует из того, что при гомотетии с положительным коэффициентом любой луч отображается на сонаправленный с ним луч, а при повороте угол между лучом и его образом равен углу поворота.

При решении разнообразных геометрических задач применяются тригонометрические функции, иногда без них вообще нельзя обойтись. Например, задача «По трем основным элементам, определяющим треугольник, вычислить остальные» не разрешима методами геометрии, но она разрешима средствами тригонометрии. Кроме того, решение задач с помощью тригонометрии часто способствует упрощению вычислений.

Для решения треугольников применяются следующие теоремы и соотношения:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (\text{теорема косинусов});$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (\text{теорема синусов});$$

$$a = 2R \sin A, \text{ где } R — \text{ радиус описанной окружности};$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = 2R^2 \sin A \sin B \sin C;$$

$$h_a = b \sin C = 2R \sin B \sin C;$$

$$p = R (\sin A + \sin B + \sin C) = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2};$$

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

где  $r$  — радиус вписанной в треугольник окружности.

С л е д с т в и я   и з   т е о р е м ы   к о с и н у с о в

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S \operatorname{ctg} A;$$

$$a^2 = (b + c)^2 - 4S \operatorname{ctg} \frac{A}{2};$$

$$a^2 = (b - c)^2 + 4S \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Докажем истинность последнего соотношения. Имеем:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A = (b - c)^2 + 2bc(1 - \cos A) = \\ &= (b - c)^2 + 4bc \sin^2 \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2},$$

получим:

$$a^2 = (b - c)^2 + 4S \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Многие геометрические задачи на вычисление расстояний и углов, на доказательство геометрических тождеств и неравенств могут быть весьма экономно решены при помощи скалярного произведения векторов. Для нахождения длины вектора применяется равенство  $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$ , а угол  $\varphi$  между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , согласно определению скалярного умножения, вычисляется так:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

При решении метрических задач, кроме формул и соотношений, приведенных на с. 25, используются также следующие:

1) Для любых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

(если  $\vec{a} \neq \vec{0}$  и  $\vec{b} \neq \vec{0}$ , то знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены).

2) Для любых трех векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ :

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a}.$$

3) Для любых трех точек  $A$ ,  $B$  и  $C$

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}.$$

4) Для любых четырех точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$

$$AB^2 + CD^2 - AD^2 - BC^2 = 2\vec{AC} \cdot \vec{DB}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \vec{AB}^2 + \vec{CD}^2 - \vec{AD}^2 - \vec{BC}^2 &= \vec{AB}^2 + (\vec{AD} - \vec{AC})^2 - \vec{AD}^2 - \\ &- (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} - 2\vec{AC} \cdot \vec{AD} = \\ &= 2\vec{AC} \cdot (\vec{AB} - \vec{AD}) = 2\vec{AC} \cdot \vec{DB}. \end{aligned}$$

Из доказанного соотношения, в частности, вытекает следующее свойство четырехугольника: **диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов длин его противоположных сторон равны.**

Координатный метод позволяет решать геометрические задачи средствами алгебры. Для решения метрических задач применяют прямоугольную систему координат. Приведем несомненные метрические сведения.

Пусть даны две точки плоскости  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$ . Тогда

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Пользуясь этой формулой, запишем уравнение окружности с центром в точке  $C(a, b)$  и радиусом  $r$ :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Теория прямой, изложенная на с. 9, справедлива и для прямоугольной системы координат. В частности, при решении задач можно пользоваться уравнением прямой с угловым коэффициентом  $k$ , проходящей через точку  $A(x_1, y_1)$ :

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Отсюда следует, что угловой коэффициент прямой, заданной двумя точками  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$ , вычисляется по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Если прямая проходит через точку  $B(0, b)$ , то ее уравнение имеет вид

$$y = kx + b.$$

Напомним, что угловой коэффициент прямой  $l$  в прямоугольной системе координат имеет следующий геометрический смысл:  $k = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол наклона прямой  $l$  к оси абсцисс.

Пусть прямые  $l_1$  и  $l_2$  заданы своими уравнениями с угловыми коэффициентами:  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$ .

Если  $l_1 \parallel l_2$ , то  $\alpha_1 = \alpha_2$ , и наоборот. Следовательно, условие  $k_1 = k_2$  выражает признак параллельности прямых  $l_1$  и  $l_2$ .

Выведем формулу для вычисления угла  $\varphi$  между пересекающимися прямыми  $l_1$  и  $l_2$  (рис. 10).

Так как  $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$  и  $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ ,  $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ , то

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2},$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Полученную формулу для вычисления угла между прямыми  $l_1$  и  $l_2$  можно записать и так:

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1}.$$

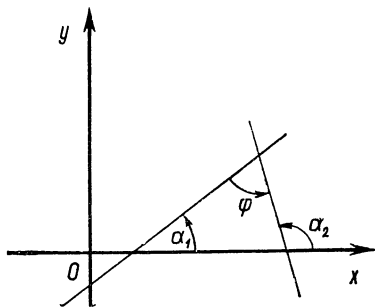


Рис. 10

Отсюда следует, что  $\varphi = 90^\circ$  тогда и только тогда, когда  $k_1 k_2 = -1$ , то есть условие  $k_1 k_2 = -1$  выражает признак перпендикулярности прямых  $l_1$  и  $l_2$ .

Положение прямой на плоскости определяется однозначно, если заданы некоторая ее точка и направляющий вектор прямой, а также — точка и вектор, перпендикулярный к прямой.

Пусть задана прямоугольная система координат и требуется написать уравнение прямой  $l$ , проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0)$  и перпендикулярной к вектору  $\vec{n} = (A, B)$ .

Произвольная точка  $M(x, y)$  плоскости принадлежит прямой  $l$  тогда и только тогда, когда вектор  $\overline{M_0M}$  перпендикулярен к вектору  $\vec{n}$ , то есть  $\vec{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$ . Вектор  $\overline{M_0M}$  имеет координаты  $(x - x_0, y - y_0)$ . Следовательно, условие перпендикулярности векторов  $\vec{n}$  и  $\overline{M_0M}$  запишется так:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Это и есть уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0$  и перпендикулярной к вектору  $\vec{n} = (A, B)$ . В задачах на перпендикулярность прямых этим уравнением часто удобнее пользоваться, чем уравнением прямой с угловым коэффициентом.

При решении метрических задач находят применение замечательные неравенства, связывающие различные «средние»:

$$A_2 = \frac{a+b}{2} \text{ — среднее арифметическое;}$$

$$G_2 = \sqrt{ab} \text{ — среднее геометрическое;}$$

$$K_2 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ — среднее квадратичное;}$$

$$H_2 = \frac{2ab}{a+b} \text{ — среднее гармоническое двух положительных чисел } a \text{ и } b;$$

$$\frac{1}{H_2} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \text{ — среднее арифметическое чисел, обратных } a \text{ и } b.$$

Легко доказать, что для любых двух положительных чисел  $a$  и  $b$  имеют место неравенства:

$$H_2 \leq G_2 \leq A_2 \leq K_2,$$

то есть

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

где равенство везде имеет место тогда и только тогда, когда  $a = b$ .

Аналогично для любых трех положительных чисел  $a, b, c$  справедливы неравенства:

$$H_3 \leq G_3 \leq A_3 \leq K_3,$$

где  $H_3 = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$  — среднее гармоническое,  $G_3 = \sqrt[3]{abc}$  — сред-

нее геометрическое,  $A_3 = \frac{a+b+c}{3}$  — среднее арифметическое и  $K_3 = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$  — среднее квадратичное чисел  $a, b, c$ . Равенство везде имеет место тогда и только тогда, когда  $a = b = c$ .

Чтобы убедиться в справедливости неравенства

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3},$$

положим:  $a = x^3, b = y^3, c = z^3$ . Тогда доказываемое неравенство приводится к виду:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0.$$

Многочлен, стоящий в левой части неравенства, разложим на множители:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y)^3 + z^3 - 3xy(x+y+z) = \\ &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx). \end{aligned}$$

Из очевидного неравенства

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$$

следует, что

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0.$$

Учитывая, что  $x + y + z > 0$ , получаем:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0.$$

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда  $x = y = z$ , что для исходного неравенства равносильно условию  $a = b = c$ .

Итак, неравенство  $G_3 \leq A_3$  доказано. Применив его к числам  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ , получим неравенство  $H_3 \leq G_3$ .

Неравенство  $A_3 \leq K_3$  равносильно неравенству

$$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2),$$

которое легко приводится к виду:

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

При решении некоторых задач полезны также следующие неравенства, которые вытекают из неравенства  $A_3 \leq K_3$ :

$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Эти неравенства, как и неравенство  $A_3 \leq K_3$ , справедливы для любых действительных чисел  $a, b, c$ .

Кроме того, находит применение неравенство

$$(a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9, \text{ где } a > 0, b > 0, c > 0,$$

вытекающее из неравенства  $H_3 \leq A_3$ .

Каждое из приведенных неравенств обращается в равенство тогда и только тогда, когда  $a = b = c$ .

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

**Пример 1.** В окружность вписан равносторонний треугольник  $ABC$ . На дуге  $BC$  дана произвольная точка  $M$ . Доказать, что

$$MA = MB + MC.$$

**Решение 1.** Интересующие нас отрезки  $MA$ ,  $MB$  и  $MC$  являются сторонами треугольников  $AMB$  и  $BMC$ , в которых  $\angle AMB = 60^\circ$  и  $\angle BMC = 120^\circ$  (рис. 11, а). Применим к этим треугольникам теорему косинусов. Обозначим:  $AB = a$ ,  $MA = x$ ,  $MB = y$ ,  $MC = z$ . Учитывая, что  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$  и  $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ , получим:

$$a^2 = x^2 + y^2 - xy; \quad a^2 = y^2 + z^2 + yz.$$

Вычтем из первого равенства второе, имеем:

$$x^2 - z^2 - y(x + z) = 0,$$

или

$$(x + z)(x - y - z) = 0.$$

Отсюда  $x = y + z$ .

**Решение 2.** Так как отрезки  $MA$ ,  $MB$  и  $MC$  являются хордами окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , то их длины можно выразить через радиус  $R$  этой окружности. Сбозначив  $\angle BAM = \alpha$ , находим:

$$x = 2R \sin(60^\circ + \alpha); \quad y = 2R \sin \alpha; \quad z = 2R \sin(60^\circ - \alpha).$$

Тогда из тождества

$$\sin(60^\circ + \alpha) = \sin \alpha + \sin(60^\circ - \alpha)$$

следует, что

$$x = y + z.$$

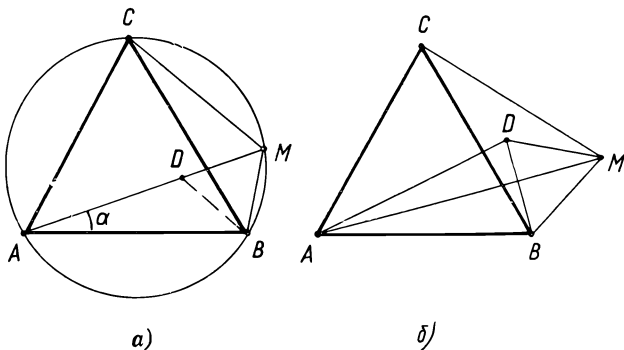


Рис. 11

Решение 3. Площадь четырехугольника  $ABMC$  выразим двумя способами.

Пусть  $\angle ANB = \varphi$ , где  $N$  — точка пересечения отрезков  $AM$  и  $BC$ . Тогда площадь четырехугольника  $ABMC$  равна  $\frac{1}{2} ax \sin \varphi$

С другой стороны, площадь этого четырехугольника равна сумме площадей треугольников  $ABM$  и  $ACM$ . Нетрудно доказать, что  $\angle ABM = \varphi$ , а  $\angle ACM = 180^\circ - \varphi$ . Поэтому

$$\frac{1}{2} ax \sin \varphi = \frac{1}{2} ay \sin \varphi + \frac{1}{2} az \sin (180^\circ - \varphi),$$

откуда

$$x = y + z.$$

Решение задачи каждым из рассмотренных способов сводилось к применению формул, содержащих тригонометрические функции и выполнению несложных преобразований. Вспомогательных построений не потребовалось.

Рассмотрим теперь геометрическое решение задачи.

Решение 4. Отложим на отрезке  $MA$  отрезок  $MD$ , равный отрезку  $MB$ , и докажем, что отрезок  $DA$  равен отрезку  $MC$  (рис. 11, а).

Поскольку  $\angle AMB = 60^\circ$ , то треугольник  $BDM$  является равносторонним. Треугольник  $ABC$  — тоже равносторонний. Повернем треугольник  $BCM$  вокруг точки  $B$  на  $60^\circ$  так, чтобы точка  $C$  совпала с точкой  $A$ . Тогда точка  $M$  совпадает с точкой  $D$  и отрезок  $MC$  совместится с отрезком  $DA$ . Итак,  $DA = MC$ . Поэтому при любом выборе точки  $M$  на дуге  $BC$  имеем:

$$MA = MB + MC.$$

Геометрическое решение задачи краткое, изящное и наглядное.

При внимательном анализе можно получить обобщение задачи.

Пусть точка  $M$  не принадлежит описанной окружности (рис. 11, б). Тогда, выполнив то же самое вспомогательное построение (поворот точки  $M$  вокруг точки  $B$  на  $60^\circ$ ), получим точку  $D$ , не принадлежащую прямой  $AM$ . Действительно, если точка  $M$  лежит внутри угла  $BAC$ , но вне описанной окружности, то  $\angle ADM = \angle ADB + 60^\circ < 180^\circ$ , так как  $\angle ADB = \angle CMB < 120^\circ$ . Для полного доказательства следует рассмотреть все возможные случаи расположения точки  $M$ .

Замечаем, что  $MD = MB$ ,  $DA = MC$ , то есть стороны треугольника  $ADM$  равны отрезкам  $MA$ ,  $MB$  и  $MC$ . Таким образом, приходим к такой теореме:

*Если в плоскости равностороннего треугольника  $ABC$  дана произвольная точка  $M$ , то отрезки  $MA$ ,  $MB$  и  $MC$  смогут быть сторонами некоторого треугольника или один из них равен сумме двух других (если точка  $M$  принадлежит описанной около треугольника  $ABC$  окружности).*

Эта теорема носит название *теоремы Помпейю*<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Помпейю Д м и т р у (1873—1954) — румынский математик.



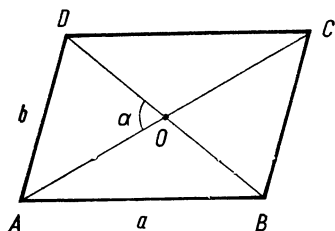


Рис. 12

Достоинства геометрического решения задачи очевидны. Если с помощью аналитических методов было нетрудно проверить истинность требуемого соотношения, то геометрический способ позволил получить рациональное решение, обобщить задачу и полностью раскрыть ситуацию. Нетрудно убедиться, что применение метода координат или векторов к решению данной задачи не целесообразно.

Однако, если воспользоваться *теоремой Птолемея*<sup>1</sup> о вписанном четырехугольнике (см. задачу 82, с. 41), то можно получить еще одно очень простое решение.

**Решение 5.** По теореме Птолемея имеем:

$$BC \cdot AM = AC \cdot BM + AB \cdot CM.$$

Так как  $BC = AC = AB = a$ , то, разделив обе части этого равенства на  $a$ , получим:

$$AM = BM + CM.$$

Рассмотрим еще несколько задач, используя для их решения различные методы, в том числе векторный и координатный.

**Пример 2.** Диагонали параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Найти площадь параллелограмма, если  $AB = a$ ,  $BC = b$  и  $\angle AOD = \alpha$ .

**Решение 1.** Площадь  $S$  параллелограмма  $ABCD$  вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha.$$

Следовательно, для решения задачи нужно найти произведение длин диагоналей параллелограмма. Будем считать, что  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , тогда  $a > b$ . Обозначим  $OA = x$  и  $OB = y$  (рис. 12). Из треугольников  $AOB$  и  $AOD$  по теореме косинусов имеем:

$$a^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha, \quad b^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha.$$

Отсюда

$$a^2 - b^2 = 4xy \cos \alpha,$$

$$xy = \frac{a^2 - b^2}{4 \cos \alpha}.$$

Подставив найденное значение  $xy$  в формулу  $S = 2xy \sin \alpha$ , получим:

$$S = \frac{a^2 - b^2}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

<sup>1</sup> Птолемей Клавдий (ок. 100 — ок. 178) — древнегреческий ученый.

**Примечание.** Поскольку  $S \leq ab$ , то задача имеет решение лишь тогда, когда  $\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{2ab}{a^2 - b^2}$ . Если  $\alpha = 90^\circ$ , то параллелограмм будет ромбом и  $a = b$ . В таком случае задача становится неопределенной, так как данных для вычисления площади ромба недостаточно.

**Решение 2.** Для любого четырехугольника  $ABCD$  имеет место соотношение:

$$2\overline{AC} \cdot \overline{DB} = AB^2 + CD^2 - AD^2 - BC^2.$$

Вычислив скалярное произведение и подставив в правую часть равенства данные значения  $AB = CD = a$ ,  $BC = AD = b$ , получим:

$$AC \cdot BD \cos \alpha = a^2 - b^2.$$

Следовательно,

$$S = \frac{a^2 - b^2}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Краткость этого решения достигается с помощью доказанного ранее векторного равенства. Попробуем обойтись без него. В случае параллелограмма связь между векторами можно установить с помощью правил сложения и вычитания векторов.

**Решение 3.** Обозначим  $\overline{AB} = \vec{a}$  и  $\overline{AD} = \vec{b}$ . Тогда

$$\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \overline{DB} = \vec{a} - \vec{b}.$$

Следовательно,

$$AC \cdot BD \cos \alpha = a^2 - b^2.$$

Остается найденное значение  $AC \cdot BD$  подставить в формулу для вычисления площади параллелограмма.

Итак, найдено простое и ясное решение задачи. Но достоинство решения 2 состоит в том, что его можно использовать для вычисления площади произвольного четырехугольника, а не только параллелограмма.

**Пример 3.** Дан равнобедренный треугольник  $ABC$ , в котором проведены высота  $CD$  и перпендикуляр  $DE$  к боковой стороне  $BC$ . Точка  $M$  — середина отрезка  $DE$ . Доказать, что отрезки  $AE$  и  $CM$  перпендикулярны.

**Решение 1.** Середину  $N$  отрезка  $BE$  соединим с точкой  $D$  (рис. 13,а). Так как  $DN$  — средняя линия треугольника  $ABE$ , то  $DN \parallel AE$ . Следовательно, достаточно доказать, что  $CM \perp DN$ .

Пусть прямая  $CM$  пересекает отрезок  $DN$  в точке  $O$ . Прямоугольные треугольники  $CDE$  и  $DBE$  подобны, так как  $\angle CDE = \angle B = 90^\circ - \angle BCD$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины соответственных сторон, поэтому треугольники  $CDM$  и  $DBN$  также подобны. Значит,  $\angle DCM = \angle BDN$ . Обозначим  $\angle DCM = \angle BDN = \gamma$ . Тогда  $\angle CDO = 90^\circ - \gamma$  и  $\angle COD = 90^\circ$ , то есть  $CM \perp DN$  и, следовательно,  $CM \perp AE$ .

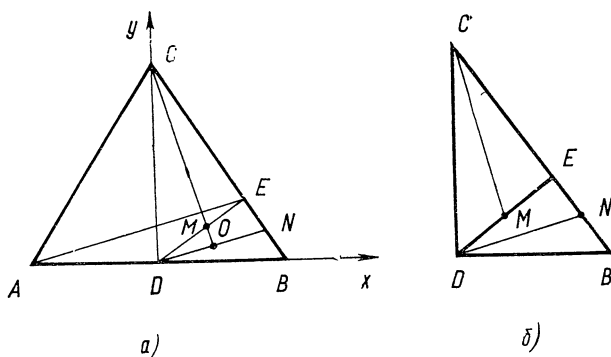


Рис. 13

**Решение 2.** Более экономное и наглядное доказательство перпендикулярности отрезков  $CM$  и  $DN$  можно получить, применив поворот вокруг точки  $E$  на  $90^\circ$  и гомететию с тем же центром и коэффициентом  $k = \frac{DE}{CE}$  (рис. 13, б). При этом центрально-подобном повороте треугольник  $CDE$  отображается на треугольник  $DBE$ , точки  $C$  и  $D$  отображаются на точки  $D$  и  $E$  ( $\frac{BE}{DE} = \frac{DE}{CE} = k$ ), середина  $M$  отрезка  $DE$  — на середину  $N$  отрезка  $BE$ , то есть отрезок  $CM$  — на отрезок  $DN$ . А так как при центрально-подобном повороте угол между любым лучом и его образом равен углу поворота, то отрезки  $CM$  и  $DN$  перпендикулярны.

Переходим к решению этой задачи координатным методом. Прежде всего следует рационально выбрать систему координат. Желательно, чтобы данные точки располагались на осях координат, тогда некоторые координаты будут нулевыми. Это позволит упростить вычисления.

**Решение 3.** Примем точку  $D$  за начало прямоугольной системы координат, а оси координат выберем так, чтобы вершины треугольника  $ABC$  (рис. 13, а) имели координаты:  $A(-1; 0)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $C(0; c)$ .

Вычислим угловые коэффициенты прямых  $AE$  и  $CM$ . Для этого сначала найдем координаты точек  $E$  и  $M$ .

Запишем уравнение прямой  $BC$ :

$$x + \frac{y}{c} = 1,$$

или

$$y = -cx + c.$$

Так как  $DE \perp BC$ , то угловой коэффициент прямой  $DE$  равен  $\frac{1}{c}$ , а ее уравнение имеет вид

$$y = \frac{1}{c}x.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y = -cx + c, \\ y = \frac{1}{c}x, \end{cases}$$

находим координаты точки  $E$ :

$$x_1 = \frac{c^2}{1+c^2}, \quad y_1 = \frac{c}{1+c^2}.$$

Следовательно,

$$M\left(\frac{x_1}{2}; \frac{y_1}{2}\right).$$

Угловые коэффициенты прямых  $AE$  и  $CM$  равны соответственно:

$$k_1 = \frac{y_1}{x_1+1} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{y_1-2c}{x_1}.$$

Подставив значения  $x_1$  и  $y_1$ , получим:

$$k_1 = \frac{c}{2c^2+1} \quad \text{и} \quad k_2 = -\frac{2c^2+1}{c}.$$

Отсюда  $k_1 k_2 = -1$ , поэтому  $AE \perp CM$ .

Координатное решение не отличается краткостью, но оно очень простое, так как не требует вспомогательных построений.

**Пример 4.** Доказать, что для углов любого треугольника  $ABC$  имеют место следующие неравенства:

$$1) \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2};$$

$$2) \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$$3) \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{3}.$$

**Решение 1.** Не нарушая общности, можно считать, что  $\angle C \leq \angle B \leq \angle A$ . Учитывая, что  $\cos(A+B) = -\cos C$ , получим:

$$\begin{aligned} \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C &= 2 \cos(A+B) \cos(A-B) + \\ &+ 2 \cos^2 C - 1 = 2 \cos^2 C - 2 \cos C \cos(A-B) - 1 \geq \\ &\geq 2 \cos^2 C - 2 \cos C - 1 = 2 \left( \cos C - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{3}{2} \geq -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Равенство  $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -\frac{3}{2}$  имеет место тогда и только тогда, когда  $\angle A = \angle B$  и  $\angle C = 60^\circ$ , то есть когда треугольник  $ABC$  равносторонний.

**Решение 2.** Если  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , то вектор  $\vec{S} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$  является нулевым только для равностороннего треугольника. Имеем:

$$(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})^2 \geq 0.$$

Так как  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = R^2 \cos 2C$ ,  $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = R^2 \cos 2B$  и  $\overline{OB} \cdot \overline{OC} = R^2 \cos 2A$ , то после возведения в квадрат получим:

$$3R^2 + 2R^2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) \geq 0,$$

или

$$\cos 2A + \cos 2A + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}.$$

Используя формулу  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ , полученное неравенство приведем к виду:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}.$$

Теперь докажем истинность неравенств 2) и 3).

В силу неравенства между средним арифметическим и средним квадратичным трех положительных чисел имеем:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \sqrt{3(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}.$$

Учитывая предыдущее неравенство, получим

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Равенство здесь достигается только тогда, когда  $\angle A = \angle B = \angle C$ .

Далее пользуясь неравенством

$$(a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9,$$

которое справедливо для положительных чисел  $a, b, c$ , имеем:

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq \frac{9}{\sin A + \sin B + \sin C} \geq 2\sqrt{3}.$$

Это неравенство также обращается в равенство только в случае, если треугольник  $ABC$  равносторонний.

Полученные для углов треугольника тригонометрические неравенства используются в дальнейшем при доказательстве геометрических неравенств. Например, неравенство  $\sin A + \sin B + \sin C \leq$

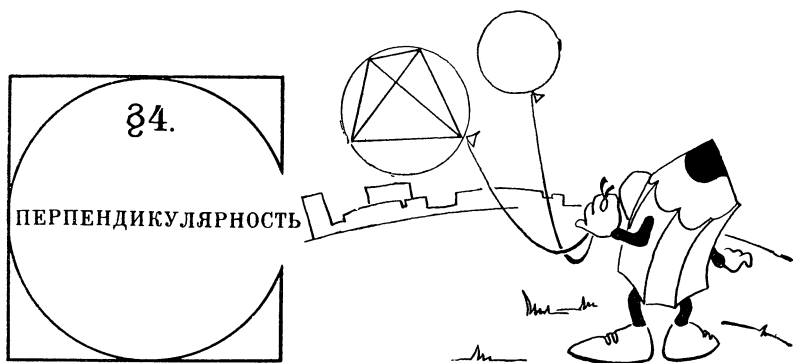
$\leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$  имеет простой геометрический смысл. После умножения его обеих частей на  $2R$  неравенство приводится к виду:

$$a + b + c \leq 3R\sqrt{3},$$

или

$$2p \leq 3R\sqrt{3}$$

( $2p$  — периметр треугольника  $ABC$ ). Равенство  $2p = 3R\sqrt{3}$  выполняется только при  $a = b = c$ . Тем самым доказано, что из всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет равносторонний треугольник.



### Задачи на доказательство

40. Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Из вершины  $C$  прямого угла проведена высота  $CD$ . Точка  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $CD$  и  $BD$ . Докажите, что отрезки  $AM$  и  $CN$  перпендикулярны.

41. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

42. Точка  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , точка  $H$  — его ортоцентр. Докажите, что

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

43. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру  $H$  треугольника  $ABC$  относительно середин его сторон, принадлежат окружности, описанной около треугольника.

44. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру  $H$  треугольника  $ABC$  относительно прямых  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ , принадлежат окружности, описанной около треугольника.

45. Докажите, что во всяком треугольнике  $ABC$  центр  $O$  описанной окружности, центроид  $M$  и ортоцентр  $H$  принадлежат одной прямой, причем  $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OM}$ . Эта прямая называется *прямой Эйлера*<sup>1</sup>.

46. Докажите, что середины трех сторон треугольника, основания трех его высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника, принадлежат одной окружности (*окружность девяти точек*).

47. Дан квадрат  $ABCD$ . Точки  $M$  и  $N$  принадлежат соответственно диагонали  $BD$  и стороне  $BC$ , причем  $BM = \frac{2}{3} BD$  и  $BN = \frac{1}{3} BC$ . Докажите, что  $\angle AMN = 90^\circ$ .

<sup>1</sup> Эйлер Леонард (1707—1783) — математик, физик, механик и астроном. Большую часть своей жизни работал в России, в Петербургской АН.

48. Одна из диагоналей вписанного в окружность четырехугольника является диаметром. Докажите, что проекции двух противоположных сторон на другую диагональ равны.

49. Из вершины  $A$  квадрата  $ABCD$  проведены лучи, образующие между собой угол  $45^\circ$ . Один из них пересекает диагональ  $BD$  в точке  $M$ , а другой — сторону  $BC$  в точке  $N$ . Докажите, что  $\angle AMN = 90^\circ$ .

50. Точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $BC$  квадрата  $ABCD$ . Отрезки  $CM$  и  $DN$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что отрезок  $AP$  равен стороне квадрата.

51. Дан квадрат  $ABCD$ . Через точку  $P$  диагонали  $BD$  параллельно сторонам квадрата проведены прямые, пересекающие стороны  $BC$  и  $CD$  в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что отрезки  $MN$  и  $AP$  равны и перпендикулярны.

52. В окружность вписан четырехугольник  $ABCD$ . Диагонали его перпендикулярны и пересекаются в точке  $S$ . Докажите, что прямая, проходящая через точку  $S$  и середину  $M$  стороны  $AB$ , перпендикулярна стороне  $CD$ .

53. На сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  вне его построены квадраты  $ACA_1A_2$  и  $BCB_1B_2$ . Докажите, что медиана  $CM$  треугольника  $ABC$  перпендикулярна отрезку  $A_1B_1$  и равна его половине.

### Задачи на построение

54. Постройте равнобедренный треугольник, если даны две его неравные высоты.

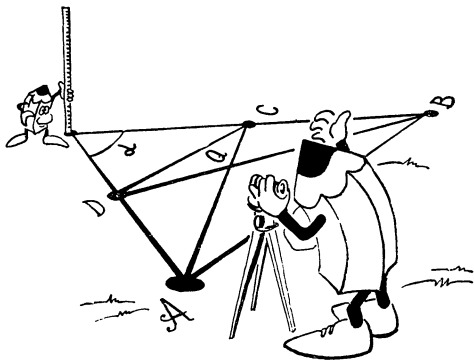
55. Восстановите квадрат  $ABCD$ , если на плоскости заданы его вершина  $A$  и точки  $M$  и  $N$ , принадлежащие соответственно сторонам  $BC$  и  $CD$ .

56. Постройте квадрат  $ABCD$ , если на плоскости заданы середина  $M$  его стороны  $AB$  и точки  $P$  и  $Q$ , принадлежащие соответственно сторонам  $BC$  и  $CD$ .

57. Постройте квадрат  $ABCD$ , если на плоскости заданы четыре точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$ , принадлежащие соответственно сторонам  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  квадрата.

### Контрольные вопросы

- 1) Какие свойства фигур называются метрическими?
- 2) Какие геометрические преобразования применяются при решении метрических задач?
- 3) Какое преобразование фигуры называется движением?
- 4) Какие фигуры называются равными?
- 5) При каком условии два ненулевых вектора перпендикулярны?



58. Найдите угол  $C$  треугольника  $ABC$ , если  $\angle A = 60^\circ$  и  $AC = \frac{1}{2} AB$ .

59. Внутри равностороннего треугольника  $ABC$  дана точка  $M$  такая, что  $\angle AMB = 120^\circ$ . Найдите  $CM$ , если  $AM = 1$  и  $BM = 2$ .

60. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  из вершины  $C$  прямого угла проведена высота  $CD$ . Найдите  $CD$ , если  $AB = c$  и  $\angle A = 15^\circ$ .

61. Угол при вершине  $C$  равнобедренного треугольника  $ABC$  равен  $120^\circ$ . На стороне  $AB$  дана точка  $M$  такая, что  $AM : MB = 1 : 2$ . Найдите  $\angle ACM$ .

62. На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  взята точка  $P$  такая, что  $AP : PB = 1 : 2$ . Найдите  $\angle ACP$ , если  $\angle A = 45^\circ$  и  $\angle B = 75^\circ$ .

63. Вычислите угол  $A$  треугольника  $ABC$ , если  $\angle B = 75^\circ$  и высота  $CD$  в два раза меньше стороны  $AB$ .

64. Вычислите углы равнобедренного треугольника, высота которого вдвое меньше биссектрисы угла при основании.

65. Дан треугольник  $ABC$ . Угол  $A$  этого треугольника вдвое больше угла  $B$ . Вычислите  $AB$ , если  $BC = a$  и  $AC = b$ .

66. Вне равностороннего треугольника  $ABC$  внутри угла  $ACB$  взята точка  $M$ . Найдите  $\angle ACM$ , если  $\angle AMC = 20^\circ$  и  $\angle BMC = 30^\circ$ .

67. В равнобедренном треугольнике  $ABC$   $\angle C = 100^\circ$ . Внутри треугольника взята точка  $M$  такая, что  $\angle BAM = 30^\circ$  и  $\angle ABM = 20^\circ$ . Найдите  $\angle ACM$ .

68. Высота  $CH$  и медиана  $CM$  треугольника  $ABC$  делят угол  $C$  на три равные части. Найдите углы треугольника.

69. В треугольнике  $ABC$  высота  $CH$ , биссектриса  $CL$  и медиана  $CM$  делят угол  $ACB$  на четыре равные части. Найдите углы треугольника.

70. Внутри квадрата  $ABCD$  дана точка  $M$ , такая, что  $AM = 1$ ,  $BM = \sqrt{2}$ ,  $CM = \sqrt{3}$ . Найдите  $DM$ ,  $\angle ABM$  и  $\angle BMC$ .

71. На стороне  $BC$  квадрата  $ABCD$  взята произвольная точка  $M$ , а на стороне  $CD$  — точка  $N$ , такая, что  $\angle AMB = \angle AMN$ . Найдите  $\angle MAN$ .



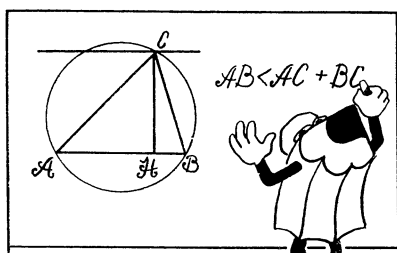
72. В ромбе  $ABCD$  угол  $B$  равен  $60^\circ$ . Внутри ромба взята точка  $M$ , такая, что  $MA = 1$ ,  $MB = 2$  и  $MC = \sqrt{3}$ . Найдите  $MD$ .

73. Найдите длину отрезка  $MN$ , соединяющего середины сторон  $AD$  и  $BC$  четырехугольника  $ABCD$ , если  $AB = a$ ,  $CD = b$  и  $\angle(\overline{AB}, \overline{DC}) = \varphi$ .

74. Диагонали трапеции перпендикулярны, а боковые стороны при продолжении пересекаются под углом  $\alpha$ . Найдите высоту трапеции, если ее основания равны  $a$  и  $b$ .

### *Контрольные вопросы*

- 1) Дайте определение поворота вокруг точки.
- 2) Докажите, что при повороте сохраняются расстояния между точками.
- 3) Докажите, что два противоположно направленных луча симметричны относительно середины отрезка, соединяющего их начала.
- 4) Докажите, что образом прямой при параллельном переносе является параллельная ей прямая.
- 5) Что такое преобразование подобия?
- 6) Докажите, что гомотетия есть преобразование подобия.
- 7) Какие фигуры называются подобными?
- 8) Сформулируйте признаки подобия треугольников.
- 9) Сформулируйте теоремы синусов и косинусов.
- 10) Выразите расстояние между точками  $A$  и  $B$  через их координаты.



75. Докажите, что квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов (*теорема Пифагора*<sup>1</sup>).

76. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  из вершины  $C$  прямого угла проведена высота  $CD$ . Докажите, что

$$h^2 = mn,$$

где  $h = CD$ ,  $m = BD$ ,  $n = AD$ .

77. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, вдвое меньше гипотенузы.

78. Докажите, что для всякого треугольника  $ABC$  имеет место соотношение:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

(*теорема косинусов*).

79. Докажите, что площадь треугольника  $ABC$  выражается формулой

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(*формула Герона*<sup>2</sup>).

80. Диагонали трапеции равны. Докажите, что трапеция равнобокая.

81. Докажите, что в равнобокой трапеции с перпендикулярными диагоналями средняя линия равна ее высоте.

82. (*Теорема Птолемея*). Докажите, что сумма произведений длин противоположных сторон четырехугольника, вписанного в окружность, равна произведению длин его диагоналей.

83. Докажите, что расстояние между серединами  $K$  и  $L$  диагоналей четырехугольника  $ABCD$  выражается формулой (*формула Эйлера*):

$$KL^2 = \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2),$$

где  $a, b, c, d$  — длины сторон,  $e$  и  $f$  — длины диагоналей.

<sup>1</sup> Пифагор Самосский (ок. 580 — ок. 500 до н. э.) — древнегреческий математик и философ.

<sup>2</sup> Герон Александрийский (вероятно I в.) — древнегреческий ученый.

84. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

85. Докажите, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов ее боковых сторон, сложенной с удвоенным произведением оснований.

86. (*Теорема Стюарта*<sup>2</sup>). Докажите, что расстояние  $d$  от вершины  $C$  треугольника  $ABC$  до произвольной точки  $D$  стороны  $AB$  определяется равенством:

$$d^2 = \frac{n}{c} a^2 + \frac{m}{c} b^2 - mn,$$

где  $m = BD$  и  $n = AD$ .

87. Докажите, что

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

88. Докажите, что если  $m_c = \frac{1}{2}c$ , то угол  $C$  треугольника  $ABC$  прямой.

89. Докажите, что если  $CC_1$  — высота треугольника  $ABC$ , точка  $H$  — его ортоцентр, то имеет место равенство:

$$CC_1 \cdot HC_1 = AC_1 \cdot BC_1.$$

90. Докажите, что

$$AH = 2R |\cos A|,$$

где  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ .

91. Ортоцентр  $H$  треугольника  $ABC$  делит высоту  $CC_1$  пополам. Докажите, что

$$\cos C = \cos A \cos B.$$

92. Докажите, что биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

93. Докажите, что

$$l_c = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{C}{2}.$$

94. Докажите, что

$$l_c^2 = ab - mn,$$

где  $m$  и  $n$  — длины отрезков, на которые биссектриса угла  $C$  делит сторону  $AB$ .

95. В окружность вписан угол  $ACB$ , равный  $120^\circ$ . Биссектриса этого угла пересекает окружность в точке  $D$ . Докажите, что

$$CA + CB = CD.$$

96. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков гипотенузы, на которые ее делит точка касания вписанной в треугольник окружности.

---

<sup>2</sup> Стюарт М. (1717—1785) — английский математик.

97. Дана окружность радиуса  $R$  с центром  $O$ . Через точку  $M$ , не принадлежащую окружности, проведена прямая, пересекающая окружность в точках  $A$  и  $B$ . Докажите, что

$$MA \cdot MB = |OM^2 - R^2|.$$

98. Докажите, что если  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , и  $D$  — точка, симметричная  $O$  относительно стороны  $AB$ , то

$$CD^2 = R^2 + a^2 + b^2 - c^2.$$

99. Докажите, что расстояние  $d$  между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника выражается формулой:

$$d^2 = R^2 - 2Rr \text{ (формула Эйлера).}$$

100. В окружность радиуса  $R$  вписан треугольник  $ABC$ . Докажите, что расстояние от центра  $J$  окружности, вписанной в треугольник, до точки  $D$ , диаметрально противоположной точке  $C$ , выражается формулой:

$$DJ^2 = 4R^2 - ab.$$

101. Докажите, что для углов любого треугольника  $ABC$  имеет место равенство:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C.$$

102. Докажите, что для углов любого треугольника  $ABC$  имеет место равенство:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

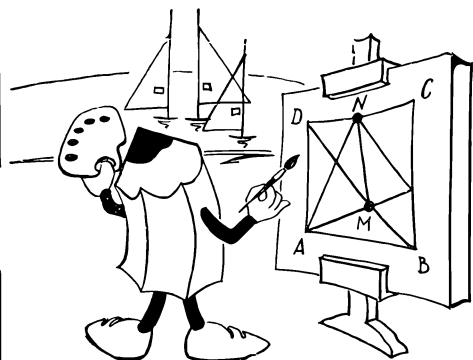
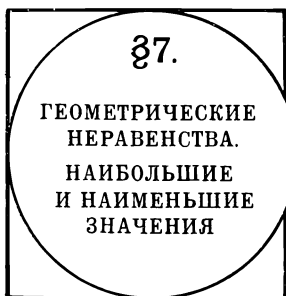
103. Докажите, что для углов любого треугольника  $ABC$  выполняется равенство:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

104. Докажите, что для углов любого треугольника  $ABC$  верны следующие соотношения:

$$1) \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2};$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1.$$



105. Докажите, что медиана, проведенная к одной из сторон треугольника, меньше полусуммы двух других его сторон.

106. Докажите, что отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон четырехугольника, не больше полусуммы двух других сторон.

107. Докажите, что площадь равнобедренного треугольника не превышает  $\frac{2}{3}$  квадрата длины медианы, проведенной к боковой стороне.

108. Докажите, что если треугольник  $ABC$  вписан в окружность радиуса  $R$  и  $ab = 2R^2$ , то  $\angle C \leq 90^\circ$ .

109. Докажите, что для всякого прямоугольного треугольника с катетами  $a$  и  $b$  и гипотенузой  $c$  имеет место неравенство:

$$a + b \leq c\sqrt{2}.$$

110. Докажите, что для прямоугольного треугольника имеет место неравенство:

$$h \leq (1 + \sqrt{2})r,$$

где  $h$  — высота, проведенная к гипотенузе,  $r$  — радиус вписанной окружности.

111. Докажите, что для углов любого треугольника  $ABC$  имеет место неравенство:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}.$$

В каком случае это неравенство обращается в равенство?

112. Докажите, что для углов любого треугольника  $ABC$  выполняются неравенства:

$$1) \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2};$$

$$2) \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

В каком случае каждое из этих неравенств обращается в равенство?

**113.** Докажите, что для углов любого треугольника  $ABC$  выполняются неравенства:

$$1) \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \geq \sqrt{3};$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geq \sqrt{3};$$

$$3) \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}.$$

В каком случае каждое из этих неравенств обращается в равенство?

**114.** Докажите, что для углов треугольника  $ABC$  и любых положительных чисел  $x, y, z$  верно неравенство:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2yz \cos A + 2zx \cos B + 2xy \cos C.$$

При каком условии имеем равенство?

**115.** Докажите, что для любого треугольника  $ABC$  справедливо неравенство:

$$h_a \leq \sqrt{p(p-a)}.$$

**116.** Докажите, что для всякого треугольника  $ABC$  имеет место неравенство:

$$h_a \leq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}.$$

При каком условии достигается равенство?

**117.** Докажите для треугольника  $ABC$  истинность неравенства:

$$a \geq 2h_a \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

**118.** Докажите, что отношение радиуса окружности, вписанной в треугольник, к радиусу окружности, описанной около него, не превосходит  $\frac{1}{2}$ .

**119.** Докажите, что для любого треугольника справедливо неравенство:

$$S \leq \frac{p^3}{3\sqrt{3}},$$

а равенство достигается лишь в том случае, когда треугольник равносторонний.

**120.** Докажите, что для любого треугольника  $ABC$  имеет место неравенство:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S,$$

а равенство имеет место лишь тогда, когда  $a = b = c$ .

121. Докажите, что из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине равнобедренный треугольник имеет наибольший периметр.

122. Из всех треугольников  $ABC$  с данным основанием  $AB$  и постоянной высотой  $CH$  найдите треугольник, около которого можно описать окружность наименьшего радиуса. Вычислите значение этого радиуса, если  $AB = c$  и  $CH = h$ .

123. Из всех четырехугольников, вписанных в окружность, найдите четырехугольник наибольшей площади.

124. Из всех прямоугольников, вписанных в полукруг, найдите прямоугольник наибольшей площади.

125. Докажите, что из всех четырехугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

126. На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  выбирается точка  $P$ . Через нее проводятся прямые, параллельные  $BC$  и  $AC$ , до пересечения со сторонами  $AC$  и  $BC$  соответственно в точках  $M$  и  $N$ . При каком выборе точки  $P$  отрезок  $MN$  имеет наименьшую длину?

127. Около окружности радиуса  $r$  описан четырехугольник  $ABCD$ . Докажите, что

$$AB + CD \geq 4r.$$

128. Расстояния от произвольной внутренней точки  $O$  треугольника  $ABC$  до его вершин равны  $R_1, R_2, R_3$ , расстояния до сторон  $BC, CA, AB$  равны  $r_1, r_2, r_3$ . Докажите, что

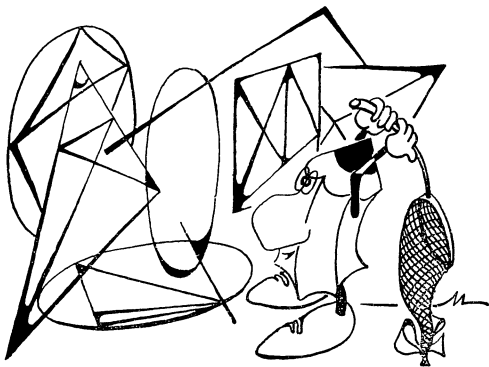
$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3)$$

равенство достигается только для равностороннего треугольника и его центра (*неравенство Эрдеша-Морделла*<sup>1</sup>).

---

<sup>1</sup> Эр д ё ш Па у л ь (р. 1913) — венгерский математик.

М ор д е л л Лу и з Ж о э л ь (1888—1972) — английский математик.



## ГЛАВА I. АФИННЫЕ ЗАДАЧИ

### § 1. Параллельность прямых и пропорциональность отрезков

#### Задачи на доказательство

**Решение 1.** Пусть  $ABCD$  — данная трапеция,  $E$  и  $F$  — середины боковых сторон  $AD$  и  $BC$ . Проведите прямую  $DF$ . Точку пересечения прямых  $DF$  и  $AB$  обозначьте через  $K$ . Докажите, что  $EF$  — средняя линия треугольника  $ADK$ .

**Решение 2.** Середину  $M$  диагонали  $AC$  трапеции соедините с точками  $E$  и  $F$ . Примените свойство средней линии треугольника.

**Решение 3.** Через вершину  $C$  трапеции проведите прямую, параллельную стороне  $AD$ .

**Решение 4.** Через середину  $F$  стороны  $BC$  трапеции проведите прямую, параллельную стороне  $AD$ .

**Решение 5.** Воспользуйтесь векторным равенством

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).$$

**Решение 1.** Пусть диагонали трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ , а продолжения боковых сторон  $AD$  и  $BC$  — в точке  $S$ . Середины оснований  $AB$  и  $CD$  обозначьте через  $M$  и  $N$ .

Гомотетия с центром  $S$  и коэффициентом  $k = \frac{SD}{SA}$  отображает точки  $A$ ,  $B$ ,  $M$  соответственно на точки  $D$ ,  $C$ ,  $N$ . Следовательно, точки  $S$ ,  $M$  и  $N$  принадлежат одной прямой. Аналогично докажите, что точки  $O$ ,  $M$  и  $N$  также принадлежат одной прямой.

**Решение 2.** Так как  $AB \parallel CD$ , то можно положить  $\overrightarrow{SD} = k\overrightarrow{SA}$  и  $\overrightarrow{SC} = k\overrightarrow{SB}$ . Воспользуйтесь формулой середины отрезка и установите, что  $\overrightarrow{SN} = k\overrightarrow{SM}$ . Отсюда следует, что точки  $S$ ,  $M$  и  $N$  принадлежат одной прямой. Для точек  $O$ ,  $M$  и  $N$  доказательство аналогично.

**Решение 3.** Введите аффинную систему координат с началом в точке  $S$  так, чтобы вершины  $A$  и  $B$  трапеции имели координаты:  $A(1; 0)$  и  $B(0; 1)$ . Пусть  $C(0; c)$ , тогда  $D(c; 0)$ . Вычислите координаты точек  $M$ ,  $N$  и  $O$ . Убедитесь, что эти точки принадлежат прямой  $x = y$ .

**Решение 4.** Достаточно рассмотреть случай, когда треугольник  $ABS$  равнобедренный. При этом прямая  $SM$  является осью симметрии треугольника.

**Решение 5.** Воспользуйтесь тем, что треугольники  $APM$  и  $ACD$ ,  $BQN$  и  $BDC$  гомотетичны.



**Решение 2.** Введите на плоскости систему координат, приняв точку  $O$  пересечения диагоналей трапеции за начало координат, а векторы  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$  — за координатные векторы.

**Решение 3.** Докажите, что в случае равнобокой трапеции отрезки  $MP$  и  $QN$  симметричны относительно прямой, проходящей через середины оснований трапеции.

**4. Решение 1.** Воспользуйтесь тем, что средние линии произвольного четырехугольника являются диагоналями параллелограмма.

**Решение 2.** Пусть  $M$  — середина любого из трех рассматриваемых отрезков. Примените векторную формулу середины отрезка и установите, что

$$\vec{M} = \frac{1}{4} (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}).$$

**Решение 3.** Точку  $O$  пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$  примите за начало аффинной системы координат, а оси координат выберите так, чтобы вершины четырехугольника имели координаты:  $A(a; 0)$ ,  $B(0; b)$ ,  $C(c; 0)$ ,  $D(0; d)$ . Затем воспользуйтесь координатной формулой середины отрезка.

**5. Решение 1.** Постройте точки  $B_1$  и  $M_1$ , такие, что  $\vec{BB}_1 = \vec{MM}_1 = \vec{AP}$ , и точки  $C_1$  и  $N_1$ , такие, что  $\vec{CC}_1 = \vec{NN}_1 = \vec{DP}$ . Докажите, что  $Q$  и  $S$  — середины отрезков  $B_1C_1$  и  $M_1N_1$ . Из условия задачи выведите, что  $\vec{PM}_1 = k\vec{PB}_1$ ,  $\vec{PN}_1 = k\vec{PC}_1$ . Следовательно, при гомотетии с центром  $P$  и коэффициентом  $k$  точки  $M_1$ ,  $N_1$ ,  $S$  отображаются соответственно на точки  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $Q$ . Значит, точки  $S$ ,  $P$ ,  $Q$  принадлежат одной прямой и  $\vec{PS} = k\vec{PQ}$ .

**Решение 2.** Докажите, что  $\vec{PS} = \frac{1}{2}(\vec{AM} + \vec{DN})$  и  $\vec{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$ . Используя условие задачи, выведите отсюда равенство  $\vec{PS} = k\vec{PQ}$ .

**Решение 3.** Введите систему координат:  $A(0; 0)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $O(0; 1)$ . Полагая  $C(m; n)$ , найдите координаты всех точек, указанных в условии задачи.

**6. Решение 1.** Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей параллелограмма  $KLMN$ , вписанного в параллелограмм  $ABCD$ . Тогда прямые  $AB$  и  $CD$ , а также прямые  $AD$  и  $BC$ , симметричны относительно точки  $O$ . Следовательно,  $O$  — центр симметрии параллелограмма  $ABCD$ .

**Решение 2.** Пусть вершины  $K$  и  $L$  параллелограмма  $KLMN$  принадлежат соответственно сторонам  $AB$  и  $BC$ , а вершины  $M$  и  $N$  — двум другим сторонам параллелограмма  $ABCD$ ; точка  $O$  — центр параллелограмма  $KLMN$ . Тогда треугольники  $AKN$  и  $CML$  симметричны относительно точки  $O$ . Следовательно,  $O$  — середина диагонали  $AC$  параллелограмма  $ABCD$ .

**Решение 3.** Введем на плоскости систему координат:  $A(0; 0)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $D(0; 1)$ . Пусть  $K(k; 0)$ ,  $L(1; l)$ ,  $M(m; 1)$ ,  $N(0; n)$ . Тогда  $\vec{KL} = (1 - k; l)$ ,  $\vec{NM} = (m; 1 - n)$ . Так как  $\vec{KL} = \vec{NM}$ , то  $k + m = 1$ ,  $l + n = 1$ . Следовательно, середины отрезков  $KM$  и  $LN$  имеют координаты:  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{1}{2}$ . Середина диагонали  $AC$  имеет те же координаты. Значит, центры параллелограммов совпадают.

**7. Решение 1.** Треугольники  $PAM$  и  $PCN$  гомотетичны, поэтому

$$\frac{AM}{CN} = \frac{PM}{PN}.$$

Аналогично

$$\frac{BN}{DM} = \frac{QN}{QM}.$$

Используя эти равенства, докажите, что  $AM = BN$ .

**Решение 2.** На стороне  $AB$  параллелограмма  $ABCD$  постройте точки  $P_1$  и  $Q_1$  так, чтобы отрезки  $PP_1$  и  $QQ_1$  были параллельны стороне  $AD$ . Тогда  $AP_1 = BQ_1$ . Треугольники  $AP_1P$  и  $ABC$ ,  $BQ_1Q$  и  $BAD$  гомотетичны. Отсюда выведите, что  $PP_1 = QQ_1$ . Следовательно,  $PP_1Q_1P$  — параллелограмм.

**Решение 3.** Введите систему координат:  $A(0; 0)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $D(0; 1)$ . Пусть  $M(0; m)$ ,  $N(1; n)$ ,  $P(a; p)$  и  $Q(b; q)$ . Тогда из условия задачи следует, что  $a = 1 - b$ . Уравнение прямой  $AC$  имеет вид  $x = y$ . Уравнение прямой  $BD$ :  $x + y = 1$ . Следовательно,  $a = p$  и  $b + q = 1$ . Отсюда выведите, что  $p = q$  и  $\overline{PQ} = (b - a, 0)$ .

**8. Решение 1.** Постройте на основании  $CD$  трапеции точку  $E$  такую, что  $\frac{CE}{ED} = \frac{AM}{MD}$ . Тогда  $ME \parallel AC$  и  $NE \parallel BD$ . Обозначив точку пересечения диагоналей трапеции через  $O$  и точку пересечения прямых  $NE$  и  $AC$  через  $L$ , докажите, что

$$\frac{MP}{PN} = \frac{EL}{LN} = \frac{DO}{OB} = \frac{CD}{AB}.$$

Аналогично

$$\frac{NQ}{QM} = \frac{CD}{AB}.$$

**Решение 2.** Выполните то же вспомогательное построение, что и при решении задачи первым способом. Сохранив прежние обозначения, введите еще точку  $K$  пересечения прямых  $EM$  и  $BD$ .

Докажите, что  $KL \parallel MN$ . Отсюда  $KLPM$  и  $KLNQ$  — параллелограммы и  $MP = QN = KL$ .

**Решение 3.** Точку  $O$  пересечения диагоналей трапеции  $ABCD$  примите за начало аффинной системы координат,  $\overline{OA}$  и  $\overline{OB}$  — за координатные векторы. Тогда  $A(1; 0)$ ,  $B(0; 1)$ , и можно положить  $C(c; 0)$ ,  $D(0; c)$ . Обозначив  $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{ND} = k$ , найдите координаты точек  $M$ ,  $N$ ,  $P$  и  $Q$ . Затем докажите, что

$$\overline{MP} = \overline{QN} = \left( \frac{c}{1+k}, \frac{-ck}{1+k} \right).$$

**9. Решение 1.** Так как треугольники  $PAB$  и  $PMD$  гомотетичны, то

$$\frac{PA}{PM} = \frac{PB}{PD}.$$

Аналогично

$$\frac{PA}{PN} = \frac{PD}{PB}.$$

Следовательно,

$$PA^2 = PM \cdot PN.$$

Учитывая, что  $PM = AM - AP$  и  $PN = AN - AP$ , получаете доказываемое равенство.

**Решение 2.** Выберите систему координат:  $A(0; 0)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $D(0; 1)$ . Положив  $N(1; c)$ , запишите уравнения прямых  $AN$  и  $BD$ . Затем вычислите координаты точек  $P$  и  $M$ .

**Решение 3.** Достаточно доказать требуемое соотношение для квадрата  $ABCD$ . Проведите перпендикуляры  $PQ$  и  $PR$  соответственно к сторонам  $AB$  и  $BC$ . Составьте пропорции:

$$\frac{AP}{AM} = \frac{BR}{BC}, \quad \frac{AP}{AN} = \frac{AQ}{AB}.$$

Остается полученные равенства почленно сложить.

10. Решение 1. Пусть  $CD$  — меньшее основание трапеции  $ABCD$ . Через вершину  $C$  проведите прямую, параллельную стороне  $AD$  и пересекающую основание  $AB$  в некоторой точке  $K$ . Постройте на отрезке  $CK$  точку  $M$ , такую, что  $\frac{KM}{MC} = \frac{m}{n}$ . Докажите, что  $EM \parallel AB$  и  $MF \parallel AB$ . Отсюда следует, что  $EF \parallel AB$  и  $EF = EM + MF$ .

Так как треугольники  $CMF$  и  $CKB$  гомотетичны, то

$$\frac{MF}{a-b} = \frac{n}{m+n},$$

поэтому

$$EF = b + \frac{n(a-b)}{m+n} = \frac{na+mb}{m+n}.$$

Решение 2. Постройте точку  $N$ , делящую диагональ  $AC$  в отношении  $\frac{m}{n}$ , считая от точки  $A$ . Тогда  $EN \parallel AB$ ,  $NF \parallel AB$ . Отсюда выведите, что  $EF \parallel AB$  и  $EF = EN + NF$ . Далее выразите  $\frac{EN}{CD}$  и  $\frac{NF}{AB}$  через  $m$  и  $n$ .

Решение 3. По формуле деления отрезка в данном отношении

$$O\bar{E} = \frac{n\overline{OA} + m\overline{OB}}{m+n}, \quad O\bar{F} = \frac{n\overline{OB} + m\overline{OC}}{m+n}.$$

Отсюда выведите равенство

$$\overline{EF} = \frac{n\overline{AB} + m\overline{DC}}{m+n}.$$

А так как векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{DC}$  сонаправлены, то  $EF \parallel AB$  и

$$EF = \frac{na+mb}{m+n}.$$

11. Решение 1. Воспользовавшись тем, что треугольники  $AMP$  и  $DNP$ , а также треугольники  $AMQ$  и  $CNQ$ , гомотетичны, докажите, что

$$\frac{PM}{PN} = \frac{MQ}{QN}, \text{ то есть } \frac{m}{n} = \frac{m-PQ}{PQ-n}.$$

Решение 2. Согласно задаче 2 прямые  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $P$ , а так как  $AB \parallel CD$ , то

$$\frac{PC}{PB} = \frac{PN}{PM} = \frac{n}{m} \text{ и } \overline{PC} = \frac{n}{m} \overline{PB}.$$

Пусть  $\overline{PQ} = \alpha \overline{PM}$  и  $\overline{AQ} = \beta \overline{QC}$ . Выразите двумя способами  $\overline{PQ}$  через  $\overline{PA}$  и  $\overline{PB}$ . Затем вычислите  $\alpha$ .

Решение 3. Введите систему координат:  $P(0; 0)$ ,  $A(1; 0)$ ,  $B(0; 1)$ .

Тогда  $C\left(0; \frac{n}{m}\right)$  и  $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ . Запишите уравнения прямых  $AC$  и  $PM$ . Вычислите координаты точки  $Q$  и установите, что

$$\overline{PQ} = \frac{2n}{m+n} \overline{PM}.$$

12. Решение 1. Пусть точки  $A_1, B_1, C_1$  принадлежат одной прямой (рис. 14). Через вершину  $C$  треугольника  $ABC$  проведем прямую, параллель-

ную сторону  $AB$  и пересекающую прямую  $A_1B_1$  в точке  $D$ . Треугольники  $B_1AC_1$  и  $B_1CD$ , а также треугольники  $A_1BC_1$  и  $A_1CD$ , гомотетичны. Следовательно,

$$\frac{AC_1}{CD} = \frac{B_1A}{B_1C}, \quad \frac{CD}{C_1B} = \frac{A_1C}{BA_1}.$$

Перемножив эти два равенства почленно, получим доказываемое соотношение. Обратную теорему легко доказать способом от противного.

**Решение 2.** По формуле деления отрезка в данном отношении имеем:

$$\overline{C_1A_1} = \frac{\overline{C_1B} + \alpha \overline{C_1C}}{1 + \alpha}, \quad \overline{C_1B_1} = \frac{\overline{C_1C} + \beta \overline{C_1A}}{1 + \beta} = \frac{\overline{C_1C} - \beta \gamma \overline{C_1B}}{1 + \beta},$$

где

$$\alpha = \frac{\overline{BA_1}}{A_1C}, \quad \beta = \frac{\overline{CB_1}}{B_1A}, \quad \gamma = \frac{\overline{AC_1}}{C_1B}.$$

Точки  $A_1, B_1, C_1$  принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда

$$(1 + \alpha) \overline{C_1A_1} = \lambda (1 + \beta) \overline{C_1B_1},$$

где  $\lambda$  — действительное число (множители  $(1 + \alpha)$  и  $(1 + \beta)$  взяты для того, чтобы упростить вычисления). Подставив в это равенство значения  $\overline{C_1A_1}$  и  $\overline{C_1B_1}$ , получим:

$$(1 + \beta \gamma \lambda) \overline{C_1B} + (\alpha - \lambda) \overline{C_1C} = 0.$$

В силу единственности разложения вектора (в данном случае — нулевого) по двум неколлинеарным векторам  $\overline{C_1B}$  и  $\overline{C_1C}$  имеем:

$$1 + \beta \gamma \lambda = 0, \quad \alpha - \lambda = 0.$$

Отсюда  $\alpha \beta \gamma = -1$ .

**Решение 3.** Выберем на плоскости аффинную систему координат так, чтобы точки  $A, B$  и  $C$  имели координаты:  $C(0; 0)$ ,  $A(1; 0)$  и  $B(0; 1)$ . Сохранив прежние обозначения, выразим координаты точек  $A_1, B_1, C_1$  через  $\alpha, \beta, \gamma$ , а затем вычислим координаты векторов  $\overline{A_1B_1}$  и  $\overline{A_1C_1}$ . Получим:

$$m \overline{A_1B_1} = (\beta(1 + \alpha); -(1 + \beta)), \quad n \overline{A_1C_1} = (\beta(1 + \alpha); \alpha \beta \gamma - \beta),$$

где  $m = (1 + \alpha)(1 + \beta)$ ,  $n = (1 + \alpha)(1 + \gamma)$ .

Следовательно, векторы  $\overline{A_1B_1}$  и  $\overline{A_1C_1}$  коллинеарны тогда и только тогда, когда  $\alpha \beta \gamma = -1$ .

**13. Решение 1.** Пусть прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $O$ . Через вершину  $C$  треугольника  $ABC$  проведем прямую, параллельную стороне  $AB$ . Точки пересечения этой прямой с прямыми  $AA_1$  и  $BB_1$  обозначим соответственно через  $M$  и  $N$ .

При гомотетии с центром  $O$  и коэффициентом  $k = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC_1}}$  точки  $A, B$  и  $C_1$  отображаются соответственно на точки  $M, N$  и  $C$ . Следовательно,

$$\frac{\overline{AC_1}}{C_1B} = \frac{\overline{MC}}{\overline{CN}}.$$

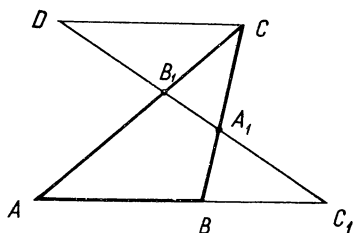


Рис. 14

Треугольники  $ABA_1$  и  $MCA_1$ ,  $ABB_1$  и  $СМВ_1$  гомотетичны. Поэтому

$$\frac{\overline{BA_1}}{A_1C} = \frac{\overline{BA}}{MC}, \quad \frac{\overline{CB_1}}{B_1A} = \frac{\overline{CN}}{BA}.$$

Перемножив найденные три равенства почленно, получим

$$\frac{\overline{AC_1}}{C_1B} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{A_1C} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{B_1A} = 1.$$

Пользуясь теоремой о пропорциональных отрезках, докажите, что это равенство остается в силе и тогда, когда прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  параллельны.

Обратную теорему докажете от противного. Допустите, что прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекаются в некоторой точке  $O$ , а прямая  $CO$  пересекает  $AB$  в некоторой точке  $D$ . Затем, используя прямую теорему, докажите, что точка  $D$  совпадает с точкой  $C_1$ . Аналогично рассмотрите случай, когда прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  параллельны.

**Решение 2.** Пусть прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке, обозначим ее  $O$ . Применив теорему Менелая (см. с. 18) к треугольнику  $ACC_1$  и секущей  $BB_1$ , а затем к треугольнику  $BCC_1$  и секущей  $AA_1$ , имеем:

$$\frac{\overline{CB_1}}{B_1A} \cdot \frac{\overline{AB}}{BC_1} \cdot \frac{\overline{C_1O}}{OC} = -1, \quad \frac{\overline{BA_1}}{A_1C} \cdot \frac{\overline{CO}}{OC_1} \cdot \frac{\overline{C_1A}}{AB} = -1.$$

Перемножив эти два равенства почленно, получим доказываемое соотношение.

Далее поступаем так же, как при решении 1.

**Решение 3.** Выберем систему координат:  $C(0; 0)$ ,  $A(1; 0)$ ,  $B(0; 1)$ .

Обозначив  $\frac{\overline{BA_1}}{A_1C} = \alpha$ ,  $\frac{\overline{CB_1}}{B_1A} = \beta$ ,  $\frac{\overline{AC_1}}{C_1B} = \gamma$ , по формуле деления отрезка в данном отношении найдем:

$$A_1\left(0; \frac{1}{1+\alpha}\right), \quad B_1\left(\frac{\beta}{1+\beta}; 0\right), \quad C_1\left(\frac{1}{1+\gamma}; \frac{\gamma}{1+\gamma}\right).$$

Запишем уравнения прямых  $AA_1$  и  $BB_1$ :

$$\begin{cases} x + (1+\alpha)y = 1, \\ \frac{1+\beta}{\beta}x + y = 1. \end{cases}$$

Пусть  $\frac{1+\beta}{\beta} \neq \frac{1}{1+\alpha}$ , или  $1+\alpha+\alpha\beta \neq 0$ . Тогда полученная система уравнений имеет единственное решение:

$$x_0 = \frac{\alpha\beta}{1+\alpha+\alpha\beta}, \quad y_0 = \frac{1}{1+\alpha+\alpha\beta}.$$

Следовательно, прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекаются в точке  $O(x_0; y_0)$ . Прямая  $CC_1$  проходит через точку  $O$  тогда и только тогда, когда угловые коэффициенты прямых  $CO$  и  $CC_1$  равны:

$$\frac{1}{\alpha\beta} = \gamma, \text{ или } \alpha\beta\gamma = 1.$$

Остается рассмотреть случай, когда прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  не пересекаются. Условия параллельности прямых  $AA_1$  и  $BB_1$ ,  $AA_1$  и  $CC_1$  в координатах записываются так:

$$1+\alpha+\alpha\beta = 0, \quad 1+\gamma+\alpha\gamma = 0.$$

Умножив первое равенство на  $\gamma$ , вычтем из него второе. Имеем:

$$\alpha\beta\gamma = 1.$$

Справедливо и обратное утверждение: если выполняется последнее равенство и одно из двух предыдущих, то выполняется и второе, то есть прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  параллельны.

14. Р е ш е н и е 1. Пусть медианы  $AF$  и  $CD$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$  (рис. 15). Точку  $F$  соединим с серединой  $K$  отрезка  $BD$ . Тогда

$$AD : DK = BD : DK = 2 : 1.$$

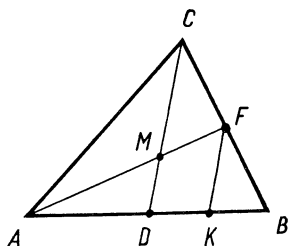


Рис. 15

А так как  $FK \parallel CD$ , то и  $AM : MF = 2 : 1$ .

Аналогично докажем, что медиана  $CD$  делится точкой  $M$  в том же отношении.

Вершины  $B$  и  $C$  равноправны, поэтому такое же заключение можно сделать и относительно медианы  $BE$  треугольника: она проходит через точку  $M$  и делится ею в отношении  $2 : 1$ , считая от точки  $B$ .

Р е ш е н и е 2. Возьмем на медиане  $CD$  треугольника  $ABC$  точку  $M$ , делящую эту медиану в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины  $C$ . Согласно формуле деления отрезка в данном отношении при любом выборе точки  $O$  имеем:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD}}{3}, \quad \overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}.$$

Отсюда

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}).$$

Пусть точка  $M_1$  делит любую из двух других медиан треугольника  $ABC$  в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины. Тогда для вектора  $\overrightarrow{OM_1}$  аналогично получим то же самое выражение, то есть  $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM}$ . Отсюда следует, что точки  $M_1$  и  $M$  совпадают. Следовательно, все три медианы треугольника  $ABC$  имеют общую точку  $M$ , которая делит каждую из медиан в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины треугольника.

Р е ш е н и е 3. Обозначив  $\frac{AM}{MF} = k$  и  $\frac{CM}{MD} = l$ , выразите вектор  $\overrightarrow{CM}$  двумя способами через векторы  $\overrightarrow{CA}$  и  $\overrightarrow{CB}$ .

Р е ш е н и е 4. Введите на плоскости аффинную систему координат:  $D(0; 0)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $C(0; 1)$ . Тогда  $F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ . Запишите уравнение прямой  $AF$  и установите, что  $M\left(0; \frac{1}{3}\right)$ .

Р е ш е н и е 5. Примените теорему Чевы (см. с. 18).

15. Р е ш е н и е 1. Середины сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$  обозначьте соответственно через  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Пусть  $D$  — такая точка, что  $\overrightarrow{C_1D} = \overrightarrow{AA_1}$ . Тогда  $AC_1DA_1$  — параллелограмм. Докажите, что  $BDCB_1$  — также параллелограмм.

Р е ш е н и е 2. Пусть  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$  и  $N$  — точка, симметричная  $M$  относительно середины стороны  $BC$ . Тогда  $BNCM$  — параллелограмм, а треугольник  $CMN$  гомотетичен искомому треугольнику с коэффициентом гомотетии  $\frac{2}{3}$ .

Р е ш е н и е 3. Докажите, что

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}.$$

**16. Решение 1.** Пусть диагональ  $AC$  параллелограмма пересекает отрезки  $DE$  и  $BF$  соответственно в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что треугольники  $MAE$  и  $MCD$  гомотетичны. Следовательно,

$$AM = \frac{1}{2} MC = \frac{1}{3} AC.$$

**Решение 2.** Докажите, что треугольники  $AME$  и  $ANB$  гомотетичны. Отсюда  $AM = \frac{1}{2} AN$ .

**Решение 3.** Проведите диагональ  $BD$  параллелограмма и воспользуйтесь свойством медиан треугольника.

**Решение 4.** Введите систему координат:  $A(0; 0)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $D(0; 1)$ .

Установите, что  $C(1; 1)$  и  $M\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .

**17.** Задача решается аналогично задаче 8.

**18. Решение 1.** Достаточно доказать, что  $AD = KF$  (рис. 16). Середину  $P$  стороны  $CB$  соединим с точкой  $M$ . Тогда  $MP \parallel AC$  (по свойству средней линии треугольника) и  $MP \parallel KF$ . Треугольники  $CKF$  и  $СМР$  гомотетичны, следовательно,

$$\frac{KF}{MP} = \frac{CF}{CP}.$$

Так как  $MP = \frac{1}{2} AC$  и  $CP = \frac{1}{2} BC$ , то

$$KF = \frac{AC}{BC} \cdot CF.$$

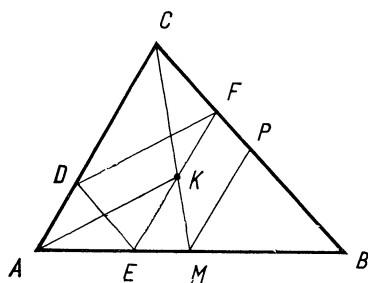


Рис. 16

Треугольники  $AED$  и  $ABC$  также гомотетичны, поэтому

$$AD = \frac{AC}{BC} \cdot DE = \frac{AC}{BC} \cdot CF.$$

Итак,  $AD = KF$ . Кроме того,  $AD \parallel KF$ . Следовательно,  $ADFK$  — параллелограмм.

**Решение 2.** Построим точку  $N$ , симметричную точке  $C$  относительно точки  $M$ . Тогда  $ACBN$  — параллелограмм,  $BN = AC$  и  $BN \parallel EF$ . Треугольники  $CKF$  и  $CNB$  гомотетичны, поэтому

$$\frac{KF}{NB} = \frac{CF}{BC},$$

или

$$KF = \frac{AC}{BC} \cdot CF.$$

Далее поступаем так же, как и при решении 1.

**Решение 3.** Введем на плоскости систему координат:  $C(0; 0)$ ,

$A(1; 0)$ ,  $B(0; 1)$ . Тогда  $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ . Положим  $F(0; a)$  и запишем уравнения прямых  $CM$  и  $EF$ :

$$x = y, \quad y = a.$$

Поскольку  $K$  — точка пересечения прямых  $CM$  и  $EF$ , то  $K(a; a)$ . Аналогично найдем, что  $D(1 - a; 0)$ ,  $E(1 - a; a)$ .

Следовательно,

$$\overline{FK} = (a; 0), \quad \overline{DA} = (a; 0),$$

то есть  $\overline{DA} = \overline{FK}$ . Поэтому  $ADFK$  — параллелограмм

**Решение 4.** Задача имеет аффинное содержание. Поэтому вместо произвольного треугольника можно взять его частный случай.

Пусть  $AC = BC$  и  $\angle C = 90^\circ$ . Тогда треугольники  $ADE$  и  $CFK$  — также прямоугольные равнобедренные. Но  $DE = CF$  (как противоположные стороны параллелограмма) и  $\angle AED = \angle FCK = 45^\circ$ . Значит, треугольники  $ADE$  и  $CFK$  равны. Следовательно,  $AD = KF$ .

**19 Решение 1.** Через точку  $Q$  параллельно сторонам  $AD$  и  $AB$  параллелограмма  $ABCD$  проведем прямые, пересекающие  $AB$  в точке  $K$  и  $AD$  в точке  $L$ . Для решения задачи достаточно доказать, что  $\frac{KM}{LN} = \frac{KB}{LD}$ .

Треугольники  $KMQ$  и  $LQD$  гомотетичны. Следовательно,

$$\frac{KM}{LQ} = \frac{KQ}{LD}.$$

Аналогично треугольники  $KBQ$  и  $LQN$  гомотетичны. Следовательно,

$$\frac{KB}{LQ} = \frac{KQ}{LN}.$$

Поделив первое из этих равенств на второе, получим доказываемое равенство. Из него следует, что точки  $Q$ ,  $P$  и  $C$  принадлежат одной прямой.

**Решение 2.** По теореме Менелая (см. с. 18), примененной к треугольнику  $ABN$  и секущей  $DM$ , имеем:

$$\frac{\overline{ND}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QN}} = -1.$$

Обозначив через  $E$  точку пересечения прямых  $NP$  и  $BC$ , применим обратную теорему к треугольнику  $BEN$ . Учитывая, что противоположные стороны параллелограммов равны, предыдущее равенство запишем так:

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QN}} \cdot \frac{\overline{NP}}{\overline{PE}} = -1.$$

Следовательно, точки  $C$ ,  $P$  и  $Q$  принадлежат одной прямой.

**Решение 3.** Введем систему координат:  $A(0; 0)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $D(0; 1)$ . Пусть  $P(m; n)$ , тогда  $M(m; 0)$ ,  $N(0; n)$ . Запишем уравнения прямых  $DM$  и  $BN$ :

$$\frac{x}{m} + y = 1, \quad x + \frac{y}{n} = 1.$$

Решим эту систему уравнений и найдем координаты точки  $Q$ :

$$x = \frac{m(1-n)}{1-mn}, \quad y = \frac{n(1-m)}{1-mn}.$$

Вычислив угловые коэффициенты прямых  $CQ$  и  $CP$ , убедимся, что они имеют одно и то же значение:  $k = \frac{1-n}{1-m}$ .

### Задачи на вычисление

**20. Решение 1.** Через вершину  $C$  треугольника  $ABC$  проведите прямую, параллельную стороне  $AB$ . Обозначьте точку пересечения этой прямой с прямой  $AM$  через  $L$ . Докажите, что  $CL = AD$  и  $\frac{CK}{KB} = \frac{CL}{AB} = \frac{1}{2}$ .



Решение 2. Через вершину  $B$  треугольника  $ABC$  проведите прямую, параллельную медиане  $CD$ .

Решение 3. Проведите  $DE \parallel AK$  и примените теорему Фалеса.

Решение 4. Примените теорему Менелая (см. с. 18) к треугольнику  $BCD$  и секущей  $AK$ .

Решение 5. Обозначив  $\frac{\overline{CK}}{\overline{KB}} = \lambda$ , выразите двумя способами  $\overline{AK}$  через  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ .

$$21. \frac{2mn}{m+n}.$$

Решение 1. Обозначим площади треугольников  $CME$ ,  $CNE$  и  $CMN$  через  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_0$ , а площадь треугольника  $ABC$  — через  $2S$ . Пусть  $\frac{CE}{CD} = \alpha$ . Тогда согласно лемме 3 (см. с. 6) имеем:

$$\frac{S_1}{S} = \alpha m, \quad \frac{S_2}{S} = \alpha n, \quad \frac{S_0}{2S} = mn.$$

А так как  $S_1 + S_2 = S_0$ , то

$$(m+n)\alpha = 2mn.$$

Следовательно,  $\alpha = \frac{2mn}{m+n}$ .

Решение 2. Обозначим  $\frac{CE}{CD} = \alpha$  и  $\frac{ME}{EN} = \lambda$ . Выразим двумя способами  $\overline{CE}$  через  $\overline{CA}$  и  $\overline{CB}$ :

$$\overline{CE} = \alpha \overline{CD} = \alpha (\overline{CA} + \overline{CB}) ; \quad \overline{CE} = \frac{\overline{CM} + \lambda \overline{CN}}{1 + \lambda} = \frac{m \overline{CA} + \lambda n \overline{CB}}{1 + \lambda}.$$

В силу единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам, получим:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{m}{1 + \lambda}, \quad \frac{\alpha}{2} = \frac{\lambda n}{1 + \lambda}.$$

Отсюда  $\lambda = \frac{m}{n}$  и  $\alpha = \frac{2mn}{m+n}$ .

Решение 3. Введем на плоскости аффинную систему координат:  $C(0; 0)$ ,  $A(1; 0)$ ,  $B(0; 1)$ . Тогда  $D\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ,  $M(m; 0)$ ,  $N(0; n)$ . Запишем уравнения прямых  $CD$  и  $MN$ :

$$y = x, \quad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Решив полученную систему уравнений, найдем координаты точки  $E$ :

$$x = y = \frac{mn}{m+n}.$$

Следовательно,

$$\frac{CE}{CD} = \frac{2mn}{m+n}.$$

Решение 4. Примените метод параллельного проектирования. Воспользуйтесь тем, что если  $AC = BC$ , то  $CE$  — биссектриса треугольника  $CMN$ .

$$22. \frac{AK}{KB} = 4, \frac{DK}{KM} = \frac{2}{3}.$$

Решение 1. Постройте точку  $P$  пересечения прямых  $DM$  и  $AB$ . Докажите, что

$$\frac{AK}{KN} = \frac{DK}{KP} = \frac{DN}{AP} = 4.$$

Решение 2. Через точку  $M$  проведите прямую, параллельную стороне  $AB$  параллелограмма.

Решение 3. Пусть  $\overline{AK} = \alpha \overline{AN}$  и  $\overline{DK} = \beta \overline{KM}$ . Выразив двумя способами  $\overline{AK}$  через  $\overline{AB}$  и  $\overline{AD}$ , вычислите  $\alpha$  и  $\beta$ .

Решение 4. Введите систему координат:  $A(0; 0)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $D(0; 1)$ .

Решение 5. Решите задачу для квадрата.

$$23. \frac{2ab}{a+b}.$$

Решение 1. Пусть диагонали трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Устанавливаем, что треугольники  $AOB$  и  $COD$  гомотетичны. Значит  $\frac{AO}{OC} = \frac{a}{b}$ .

Докажите, что  $EO = OF = \frac{ab}{a+b}$ .

Решение 2. Через вершину  $C$  трапеции проведите прямую, параллельную стороне  $AD$ . Обозначив  $EF$  через  $x$ , докажите, что

$$\frac{a-b}{x-b} = \frac{a+b}{b}.$$

Решение 3. Докажите, что  $\frac{AE}{ED} = \frac{a}{b}$  и воспользуйтесь результатом задачи 10.

Решение 4. Введите аффинную систему координат с началом в точке  $A$ . Оси координат выберите так, чтобы вершины трапеции имели координаты:  $B(a; 0)$ ,  $D(0; d)$ ,  $C(b; d)$ . Найдите абсциссу точки  $F$ .

$$24. \frac{CN}{ND} = 2.$$

Решение 1. Через вершину  $D$  четырехугольника  $ABCD$  проведем прямую параллельно стороне  $AB$ , пересекающую прямые  $AC$  и  $MN$  соответственно в точках  $E$  и  $F$ . Тогда  $DF = FE$  и  $OC = 2OE$ . Применив к треугольнику  $CDE$  и секущей  $ON$  теорему Менелая (см. с. 18), получим:

$$\frac{CN}{ND} = 2.$$

В общем случае, если  $\frac{AO}{OC} = \frac{a}{c}$  и  $\frac{BO}{OD} = \frac{b}{d}$ , задача решается аналогично, и  $\frac{CN}{ND} = \frac{bc}{ad}$ .

Решение 2. Обозначив  $\frac{CN}{ND} = \lambda$ , выразим двумя способами  $\overline{ON}$  через  $\overline{OA}$  и  $\overline{OB}$ . По формуле деления отрезка в данном отношении имеем:

$$\overline{ON} = \frac{\overline{OC} + \lambda \overline{OD}}{1 + \lambda}.$$

Согласно условию задачи  $\overline{OC} = -\overline{OA}$ ,  $\overline{OD} = -\frac{1}{2}\overline{OB}$ . Значит,

$$\overline{ON} = \frac{-\overline{OA} - \frac{1}{2}\lambda \overline{OB}}{1 + \lambda}.$$

С другой стороны,

$$\overline{ON} = \alpha \overline{OM} = \frac{\alpha}{2} (\overline{OA} + \overline{OB}).$$

В силу единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам получаем:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{-1}{1+\lambda}, \quad \frac{\alpha}{2} = \frac{-\lambda}{1+\lambda},$$

откуда  $\lambda = 2$ .

Попутно находим, что  $\alpha = -\frac{1}{3}$  и, следовательно,  $\frac{ON}{OM} = \frac{1}{3}$ .

**Решение 3.** Выберем аффинную систему координат с началом в точке  $O$  так, чтобы вершины четырехугольника  $ABCD$  имели координаты:  $A(2; 0)$ ,  $B(0; 2)$ . Тогда  $C(-2; 0)$ ,  $D(0; -1)$  и  $M(1; 1)$ .

Если  $\frac{CN}{ND} = \lambda$ , то  $N\left(\frac{-2}{1+\lambda}, \frac{-\lambda}{1+\lambda}\right)$ .

Уравнение прямой  $OM$  имеет вид  $y = x$ . Учитывая, что точка  $N$  принадлежит прямой  $OM$ , получим  $\lambda = 2$ .

## § 2. Площади

### Задачи на доказательство

**25. Решение 1.** Постройте на стороне  $AB$  точки  $K$  и  $L$  такие, что  $KN \parallel CD$  и  $LM \parallel CD$ . Тогда

$$\frac{KN}{CD} = \frac{AK}{AD} \text{ и } \frac{KN}{DE} = \frac{KB}{BD}.$$

Отсюда

$$\frac{KN}{CD} + \frac{KN}{DE} = 1.$$

Далее установите, что  $LM = KN$  и  $MN \parallel AB$ .

**Решение 2.** Пользуясь теоремой Чевы (см. с. 18), докажите, что  $\frac{CM}{MB} = \frac{CN}{NA}$  и, следовательно,  $\frac{CM}{CB} = \frac{CN}{CA}$ . Значит, треугольники  $ACM$  и  $BCN$  равновелики.

**Решение 3.** Задачу достаточно решить для равнобедренного треугольника. Установите, что если  $AC = BC$ , то треугольники  $ABM$  и  $ABN$  равны.

**26. Решение 1.** Через точку  $M$  проведите прямые, параллельные сторонам параллелограмма.

**Решение 2.** Треугольник  $ABM$  перенесите параллельно на вектор  $\overline{AD}$  в положение  $DCN$ . Тогда  $AMND$  и  $BMNC$  — параллелограммы, а площадь четырехугольника  $DMCN$  равна сумме площадей треугольников  $ADM$  и  $BCN$ .

**Решение 3.** Решите задачу для квадрата.

**27. Решение 1.** Через точку  $M$  параллельно стороне  $AD$  трапеции проведем прямую, пересекающую прямые  $AB$  и  $CD$  соответственно в точках  $K$  и  $L$ . Тогда  $AKLD$  — параллелограмм. Так как треугольники  $BMK$  и  $CML$  равны, то параллелограмм  $AKLD$  и трапеция  $ABCD$  равновелики. Площадь треугольника  $AMD$  составляет половину площади параллелограмма и, следовательно, половину площади трапеции.

**Решение 2.** Пусть прямая  $DM$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $E$ . Тогда треугольник  $ADE$  и трапеция  $ABCD$  равновелики (треугольник  $BEM$  равен треугольнику  $CDM$ ). А так как  $AM$  — медиана треугольника  $ADE$ , то площадь треугольника  $AMD$  равна половине площади треугольника  $ADE$ , то есть половине площади трапеции.

Решение 3. Так как задача имеет аффинное содержание, то вместо произвольной трапеции можно взять прямоугольную.

Пусть  $\angle BAD = 90^\circ$  и  $MN$  — средняя линия трапеции. Тогда  $S_{AMD} = \frac{1}{2} AD \cdot MN$ ,  $S_{ABCD} = AD \cdot MN$ . Отсюда и вытекает доказываемое предложение.

28. Решение 1. Пусть  $LN$  — средняя линия трапеции  $ABCD$ ,  $N$  — середина боковой стороны  $BC$ . Заметив, что  $S_{AMB} = S_{ABN}$  и  $S_{CDM} = S_{CDN}$ , воспользуйтесь результатом задачи 27.

Решение 2. Через точку  $M$  проведите прямую, пересекающую основания  $AB$  и  $CD$  трапеции в точках  $E$  и  $F$ . Тогда  $M$  — середина отрезка  $EF$ . Воспользуйтесь результатом задачи 27 и докажите, что сумма площадей треугольников  $ADM$  и  $BCM$  равна половине площади трапеции  $ABCD$ .

Решение 3. Используя формулы площадей треугольника и трапеции, докажите, что сумма площадей треугольников  $ABM$  и  $CDM$  равна половине площади трапеции.

29. Решение 1. Пусть  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  — середины сторон четырехугольника  $ABCD$  (рис. 17). Используя свойство средней линии треугольника, докажите, что сумма площадей треугольников  $BKL$  и  $DMN$  равна  $\frac{1}{4}$  площади четырехугольника  $ABCD$ .

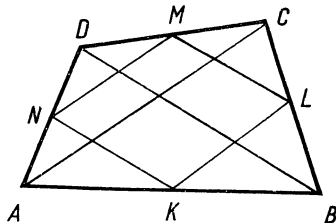


Рис. 17

Решение 2. Через вершины четырехугольника  $ABCD$  проведите прямые, параллельные диагоналям  $AC$  и  $BD$ . Установите, что площадь параллелограмма, ограниченного этими прямыми, вдвое больше площади трапеции и вчетверо больше площади четырехугольника  $KLMN$ .

Решение 3. Точку  $O$  пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$  соедините с вершинами четырехугольника  $KLMN$ . Докажите, что треугольники:  $AKN$  и  $OKN$ ,  $BKL$  и  $OKL$ ,  $CLM$  и  $OLM$ ,  $DMN$  и  $OMN$  равновелики.

Решение 4. Середину  $E$  диагонали  $AC$  соедините с вершинами четырехугольника  $KLMN$ . Докажите, что четырехугольники  $BKEL$  и  $DMEN$  являются параллелограммами, а треугольники  $AKN$  и  $ELM$  равны.

### Задачи на вычисление

30.  $\frac{5}{9}$ .

Решение 1. Пусть  $S$  — площадь параллелограмма  $ABCD$ . Докажите, что  $S_{BKL} = \frac{2}{9} S_{ABC} = \frac{1}{9} S$ .

Решение 2. Через точки  $K$  и  $M$  проведите прямые, параллельные стороне  $BC$  параллелограмма, пересекающие отрезки  $MN$  и  $KL$  соответственно в точках  $E$  и  $F$ . Установите, что  $KE = \frac{5}{6} AD$  и  $S_{KEN} = \frac{5}{36} S$ . Затем докажите, что  $KLMN$  — параллелограмм, который прямыми  $KE$ ,  $MF$  и  $KM$  расщепляется на четыре равновеликих треугольника.

Решение 3. Если  $ABCD$  — квадрат, то вписанный четырехугольник  $KLMN$  — также квадрат. Пользуясь теоремой Пифагора, докажите, что  $\frac{KL}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}$  и отношение площадей квадратов равно  $\frac{5}{9}$ .

Поскольку задача является аффинной, то в случае параллелограмма получится тот же результат.

31.  $\frac{2}{5}$ . Решение 1. Из условия задачи следует, что  $AL \parallel CN$  и  $BM \parallel DK$ . Поэтому четырехугольник  $PQRS$ , ограниченный прямыми  $AL$ ,

$BM$ ,  $CN$  и  $DK$ , является параллелограммом (рис. 18). Обозначьте его площадь через  $S_1$ , а площадь параллелограмма  $ABCD$  — через  $S$ .

Используя теорему об отрезках, отсекаемых на сторонах угла параллельными прямыми, и гомотетию, докажите, что  $QL = \frac{1}{10} AL$ , и поэтому  $S_{ABQ} = \frac{9}{10} S_{ABL} = \frac{3}{20} S$ .

Убедитесь, что треугольники  $ABQ$ ,  $BCR$ ,  $CDS$  и  $DAP$  равновелики. Следовательно,

$$S_1 = S - \frac{3}{5} S = \frac{2}{5} S.$$

Решение 2. Обозначив площади треугольников  $AKP$  и  $BLQ$  соответственно через  $x$  и  $y$ , докажите, что площади треугольников  $ABQ$  и  $BCR$  равны  $9x$  и  $9y$ . Убедитесь, что площадь треугольника  $CMR$  равна  $x$ , а площадь каждого из треугольников  $ABL$  и  $BCM$  равна  $\frac{1}{6} S$ . Поэтому

$$9x + y = \frac{1}{6} S, \quad x + 9y = \frac{1}{6} S.$$

$$\text{Отсюда } x = y = \frac{1}{60} S.$$

Решение 3. Решите задачу для квадрата.

$$32. \frac{AN}{ND} = \frac{CD}{AB}.$$

Решение 1. Пусть  $AB = a$  и  $CD = b$ .

Поскольку  $MN$  — медиана треугольника  $BCN$ , то  $S_{BMN} = S_{CMN}$ . А так как  $S_{ABMN} = S_{CDMN}$ , то  $S_{ABN} = S_{CDN}$ , или

$$AN \cdot AB = DN \cdot CD,$$

откуда

$$\frac{AN}{ND} = \frac{b}{a}.$$

Решение 2. Согласно задаче 27 площадь треугольника  $ADM$  равна половине площади трапеции  $ABCD$ , то есть равна площади четырехугольника  $ABMN$ . Следовательно,  $S_{DMN} = S_{ABM}$ . Аналогично  $S_{AMN} = S_{CDM}$ . Но

$$\frac{S_{AMN}}{S_{DMN}} = \frac{AN}{ND} \text{ и } \frac{S_{CDM}}{S_{ABM}} = \frac{CD}{AB}.$$

Следовательно,

$$\frac{AN}{ND} = \frac{CD}{AB} = \frac{b}{a}.$$

Решение 3. Пусть  $AB$  — большее основание трапеции и  $LM$  — ее средняя линия. Через точку  $M$  параллельно стороне  $AD$  проведем прямую, пересекающую основание  $AB$  в точке  $K$ . Тогда

$$S_{AKML} = S_{ABMN} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Следовательно, треугольники  $LMN$  и  $BKM$  равновелики, поэтому

$$LN \cdot LM = BK \cdot KM,$$

или

$$\frac{AL}{LN} = \frac{LM}{BK}.$$

Это равенство можно записать так:

$$\frac{AN + ND}{ND - AN} = \frac{a + b}{a - b}.$$

Откуда

$$\frac{AN}{ND} = \frac{b}{a}.$$

**Решение 4.** Построим точки  $A_1$  и  $D_1$ , симметричные вершинам  $A$  и  $D$  трапеции относительно точки  $M$ . Получим параллелограмм  $AD_1A_1D$ , который отрезком  $BC$  разбивается на две симметричные относительно точки  $M$  трапеции:  $ABCD$  и  $A_1CBD_1$ .

Поскольку задача является аффинной, то вместо произвольного параллелограмма можно взять квадрат  $AD_1A_1D$ . В таком случае (с помощью поворота вокруг точки  $M$  на  $90^\circ$ ) можно доказать, что четырехугольники  $ABMN$  и  $DNMC$  равны,  $AN = CD$ ,  $DN = AB$ . Поэтому  $\frac{AN}{ND} = \frac{CD}{AB}$ .

33.  $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$ .

**Решение 1.** Так как треугольники  $ABC$  и  $ABD$  равновелики, то треугольники  $BOC$  и  $AOD$  также равновелики. Обозначим площадь треугольника  $BOC$  через  $S_3$ , а площадь трапеции  $ABCD$  — через  $S$ . Тогда имеем:

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{AO}{CO}, \quad \frac{S_3}{S_2} = \frac{AO}{CO}.$$

Отсюда

$$S_3^2 = S_1 \cdot S_2.$$

Следовательно,

$$S = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 \cdot S_2}.$$

**Решение 2.** Применим параллельный перенос: построим точку  $M$  так, чтобы  $\overline{BM} = \overline{DC}$ . Треугольник  $ACM$  равновелик трапеции  $ABCD$  и гомотетичен треугольнику  $AOB$ . Следовательно, если  $AB = a$  и  $CD = b$ , то

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}} = \frac{a}{a+b},$$

где  $S$  — площадь трапеции  $ABCD$ . Аналогично докажем, что

$$\sqrt{\frac{S_2}{S}} = \frac{b}{a+b}.$$

Сложив эти два равенства почленно, получим

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} = 1,$$

или

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}.$$

**Решение 3.** Вместо произвольной трапеции возьмем равнобокую, у которой диагонали перпендикулярны. В таком случае треугольник  $AOB$  будет прямоугольным равнобедренным, его высота  $OM$  равна  $\frac{1}{2} AB$ . Обозначив  $AB = 2x$ ,  $CD = 2y$ , получим

$$S_1 = x^2, \quad S_2 = y^2.$$

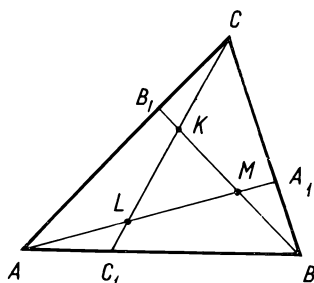


Рис. 19

Высота трапеции равна  $x + y$ . Следовательно,

$$S = (x + y)^2 = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 \cdot S_2}.$$

Поскольку задача имеет аффинный характер, то полученный ответ справедлив для любой трапеции.

$$34. \frac{1}{9} S.$$

Решение 1. Пусть  $A_1, B_1, C_1$  — середины сторон  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$ . Докажите, что треугольники  $A_0B_0C_0$  и  $A_1B_1C_1$  гомотетичны, причем коэффициент гомотетии равен  $\frac{2}{3}$ . Значит, площадь тре-

угольника  $A_0B_0C_0$  составляет  $\frac{4}{9}$  площади треугольника  $A_1B_1C_1$ .

Решение 2. Пусть  $CM$  и  $CN$  — медианы треугольников  $ACP$  и  $BCP$ . Докажите, что  $A_0B_0 = \frac{2}{3} MN = \frac{1}{3} AB$ .

Решение 3. Воспользуйтесь формулой центра тяжести треугольника и докажите, что  $\overline{A_0B_0} = \frac{1}{3} \overline{BA}$ .

$$35. \frac{1}{7}.$$

Решение 1. Пусть прямые  $CC_1, BB_1, AA_1$  пересекаются попарно в точках  $K, L, M$  (рис. 19). Обозначим  $S_{CB_1K} = x$ . Тогда  $S_{AB_1K} = 2x$ , так как  $AB_1 = 2B_1C$ . Аналогично, если  $S_{AC_1K} = y$ , то  $S_{BC_1K} = 2y$ . Учитывая, что  $S_{ACC_1} = \frac{1}{3} S$  и  $S_{ABB_1} = \frac{2}{3} S$ , получаем:

$$3x + y = \frac{1}{3} S, \quad 2x + 3y = \frac{2}{3} S.$$

Отсюда

$$x = \frac{1}{21} S.$$

Далее находим, что

$$S_{BCK} = \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{21} \right) S = \frac{2}{7} S.$$

Такую же площадь имеет каждый из треугольников  $ACL$  и  $ABM$ . Следовательно,

$$S_{KLM} = \frac{1}{7} S.$$

Решение 2. Применив теорему Менелая (см. с. 18) к треугольнику  $ACC_1$  и секущей  $BB_1$ , получим:

$$\frac{CK}{KC} = \frac{3}{4}.$$

Значит,  $CK = \frac{3}{7} CC_1$  (это соотношение можно получить и без использования теоремы Менелая).

Площади треугольников  $CB_1K$  и  $CAC_1$  относятся как произведения длин сторон, заключающих общий угол. Следовательно,

$$S_{CB_1K} = \frac{1}{7} S_{ACC_1} = \frac{1}{21} S.$$

Далее поступаем так, как при решении 1.

Решение 3. Сумма площадей треугольников  $ABA_1$ ,  $BCB_1$  и  $CAC_1$  равна  $S$ . Значит, площадь треугольника  $KLM$  равна сумме площадей треугольников  $AC_1L$ ,  $BA_1M$  и  $CB_1K$ .

Применив теорему Менелая к треугольнику  $BCC_1$  и секущей  $AA_1$ , найдем, что  $\frac{C_1L}{LC} = \frac{1}{6}$  или  $C_1L = \frac{1}{7} CC_1$ . Следовательно,

$$S_{AC_1L} = \frac{1}{7} S_{AC_1C} = \frac{1}{21} S.$$

С помощью аналогичных вычислений докажем, что треугольники  $AC_1L$ ,  $BA_1M$  и  $CB_1K$  равновелики, поэтому

$$S_{KLM} = 3S_{AC_1L} = \frac{1}{7} S.$$

Решение 4. Вычислив отношение отрезков, на которые точки  $K$  и  $L$  делят отрезок  $CC_1$  (см. способы решения 2 и 3), определяем, что  $CK = KL$ . Аналогично  $BM = MK$  и  $AL = LM$ . Значит, площадь каждого из треугольников  $ABM$ ,  $BSK$  и  $CAL$  вдвое больше площади треугольника  $KLM$ , а площадь треугольника  $ABC$  в 7 раз больше, то есть

$$S_{KLM} = \frac{1}{7} S.$$

Решение 5. Задачу достаточно решить для равностороннего треугольника  $ABC$ . В таком случае треугольники  $ABA_1$ ,  $BCB_1$  и  $CAC_1$  равны. Кроме того, равны также треугольники  $AC_1L$ ,  $BA_1M$  и  $CB_1K$ , а треугольники  $ABA_1$  и  $ALC_1$  подобны. Поэтому  $AL = 3LC_1 = 3MA_1$ ,  $\angle ALC_1 = 60^\circ$  и каждый из углов треугольника  $KLM$  равен  $60^\circ$ , то есть треугольник  $KLM$  — равносторонний.

Положив  $AB = 3$ , вычислим  $LM$ .

Из треугольника  $ABA_1$  по теореме косинусов имеем

$$AA_1 = \sqrt{7}.$$

Коэффициент подобия треугольников  $ALC_1$  и  $ABA_1$  равен  $\frac{AC_1}{AA_1} = \frac{1}{\sqrt{7}}$ .

Поэтому

$$AL = \frac{AB}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}}, \quad MA_1 = \frac{1}{\sqrt{7}} \quad \text{и} \quad LM = \frac{3}{\sqrt{7}}.$$

Значит,

$$\frac{S_{KLM}}{S} = \left(\frac{LM}{AB}\right)^2 = \frac{1}{7}.$$

### § 3. Геометрические места точек

36. Средняя линия треугольника  $ABC$  параллельная стороне  $AB$ .

Решение 1. Постройте на стороне  $AB$  точку  $D$  такую, чтобы  $\frac{AD}{DB} = \frac{AM}{MC}$ . Докажите, что  $CMDN$  — параллелограмм, поэтому середины отрезков  $MN$  и  $CD$  совпадают.

Решение 2. Обозначьте середины отрезков  $AC$ ,  $CB$  и  $MN$  соответственно через  $P$ ,  $Q$  и  $S$ . Воспользуйтесь векторной формулой деления отрезка в данном отношении и докажите, что

$$\overrightarrow{PS} = \frac{k}{1+k} \overrightarrow{PQ}.$$



**Решение 3.** Введите систему координат:  $C(0; 0)$ ,  $A(1; 0)$ ,  $B(0; 1)$ . Докажите, что координаты  $(x; y)$  середины  $S$  отрезка  $MN$  удовлетворяют условиям:

$$x = \frac{1}{2(1+k)}; \quad y = \frac{k}{2(1+k)}, \text{ где } k > 0.$$

Отсюда

$$x + y = \frac{1}{2}, \text{ причем } x > 0 \text{ и } y > 0.$$

Остается доказать, что любая точка средней линии треугольника  $ABC$  принадлежит искомому геометрическому месту точек.

37. Медиана  $CD$  треугольника  $ABC$  (без ее концов).

Задачу можно решить теми же способами, что и задачу 2 (с. 47).

38. Прямая, симметричная прямой  $l$  относительно середины отрезка  $AB$ .

**Решение 1.** Пусть  $P$  — середина отрезка  $M_1M_2$ . Применив теорему о средней линии треугольника, докажите, что  $MAPB$  — параллелограмм, и поэтому точки  $P$  и  $M$  симметричны относительно середины  $O$  отрезка  $AB$ .

**Решение 2.** Примените гомотегию с центром  $M$  и коэффициентом  $k = 2$ .

**Решение 3.** Пусть  $P$  — середина отрезка  $M_1M_2$  и  $O$  — середина отрезка  $AB$ . Воспользуйтесь векторной формулой середины отрезка и докажите, что  $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OM}$ .

39. Средняя линия  $A_1B_1$  треугольника  $ABC$  (без точек  $A_1$  и  $B_1$ ).

**Решение 1.** Пусть  $MPSQ$  — параллелограмм и прямая  $A_1B_1$  пересекает прямые  $SP$  и  $SQ$  соответственно в точках  $S_1$  и  $S_2$ . Тогда имеем:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{A_1P}{A_1B} = \frac{A_1S_1}{A_1B_1}. \text{ С другой стороны, } \frac{AM}{AB} = \frac{AQ}{AB_1} = \frac{A_1S_2}{A_1B_1}.$$

Отсюда следует, что  $A_1S_1 = A_1S_2$  и, значит, точки  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S$  совпадают.

Обратно, если  $S$  — некоторая точка средней линии  $A_1B_1$  треугольника  $ABC$  и  $\frac{A_1S}{SB_1} = \lambda$ , то, разделив отрезки  $A_1B$ ,  $AB_1$ ,  $AB$  точками  $P$ ,  $Q$ ,  $M$  в отношении  $\lambda$ , получим параллелограмм  $MPSQ$ .

**Решение 2.** Пусть прямые  $MQ$  и  $AA_1$  пересекаются в точке  $E$ , а прямые  $MP$  и  $BB_1$  — в точке  $F$ . Тогда  $\overline{ME} = \frac{2}{3} \overline{MQ}$ ,  $\overline{MF} = \frac{2}{3} \overline{MP}$ . Отсюда сложением находим, что  $\overline{MG} = \frac{2}{3} \overline{MS}$ , где  $G$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Следовательно  $\overline{MS} = \frac{3}{2} \overline{MG}$ , или  $\overline{GS} = -\frac{1}{2} \overline{GM}$ .

Итак, множество точек  $S$  есть образ отрезка  $AB$  при гомотетии с центром  $Q$  и коэффициентом  $k = -\frac{1}{2}$ , то есть отрезок  $A_1B_1$ .

**Решение 3.** Введем на плоскости аффинную систему координат:  $A(0; 0)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $C(0; 1)$ . Полагая  $M(m; 0)$ , вычислим координаты точек  $P$ ,  $Q$  и  $S$ . Получим:

$$S\left(\frac{1-m}{2}; \frac{1}{2}\right), \text{ где } 0 < m < 1.$$

Следовательно, координаты точки  $S$  удовлетворяют соотношениям  $y = \frac{1}{2}$  и  $0 < x < \frac{1}{2}$ , то есть точка  $S$  принадлежит отрезку  $A_1B_1$ .

Обратно, если  $S$  — произвольная точка отрезка  $A_1B_1$ , то полагая  $S\left(s; \frac{1}{2}\right)$ , найдем, что существует параллелограмм  $MPSQ$ , удовлетворяющий условию задачи, причем  $M(1 - 2s; 0)$ .

## ГЛАВА II. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

### Задачи на доказательство

#### § 4. Перпендикулярность

40. Р е ш е н и е 1. Установите, что  $M$  — точка пересечения высот треугольника  $ACN$ .

Р е ш е н и е 2. Воспользуйтесь соотношениями

$$\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{CD} - \overline{CA}, \quad \overline{CN} = \frac{1}{2} (\overline{CB} + \overline{CD})$$

и докажите, что  $\overline{AM} \cdot \overline{CN} = \frac{1}{4} \overline{CD} \cdot (\overline{AB} + \overline{AD}) = 0$ .

Р е ш е н и е 3. Примените центрально-подобный поворот, отображающий точку  $D$  на себя, точку  $A$  — на точку  $C$ , и докажите, что при этом точка  $C$  отображается на точку  $B$ , а точка  $M$  — на точку  $N$ .

41. Р е ш е н и е 1. Через вершины треугольника  $ABC$  проведите прямые, параллельные его сторонам. Установите, что серединные перпендикуляры сторон полученного треугольника содержат высоты треугольника  $ABC$ .

Р е ш е н и е 2. Пусть высоты  $AA_1$  и  $BB_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Тогда

$$\overline{HA} \cdot \overline{BC} = \overline{HB} \cdot \overline{CA} = 0.$$

Отсюда выведите, что  $\overline{HC} \cdot \overline{AB} = 0$ . Для этого достаточно доказать тождество

$$\overline{HA} \cdot \overline{BC} + \overline{HB} \cdot \overline{CA} + \overline{HC} \cdot \overline{AB} = 0.$$

Р е ш е н и е 3. Введите прямоугольную систему координат так, чтобы вершины треугольника  $ABC$  имели координаты  $A(a; 0)$ ,  $B(b; 0)$ ,  $C(0; c)$ . Запишите уравнение прямой  $AA_1$ , учитывая, что  $AA_1 \perp BC$  и  $\overline{BC}(-b; c)$ .

Обозначив через  $H$  точку пересечения высот  $AA_1$  и  $CC_1$ , установите, что  $H\left(0; -\frac{ab}{c}\right)$ . Затем убедитесь, что точка пересечения высот  $BB_1$  и  $CC_1$  совпадает с точкой  $H$ .

42. Р е ш е н и е 1. Легко проверить, что доказываемое соотношение выполняется для прямоугольного треугольника. Рассмотрим непрямоугольный треугольник  $ABC$  (рис. 20). Построим точку  $D$ , симметричную точке  $O$  относительно стороны  $AB$ . Тогда  $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{OB}$ . Затем построим точку  $H$  такую, что  $\overline{OH} = \overline{OD} + \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ .

Докажем, что точка  $H$  и есть ортоцентр треугольника  $ABC$ .

Действительно, по построению прямые  $CH$  и  $OD$  параллельны.  $OD$  — серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$ , следовательно, прямая  $CH$  также перпендикулярна к прямой  $AB$ , и точка  $H$  принадлежит высоте  $CC_1$  треугольника  $ABC$ .

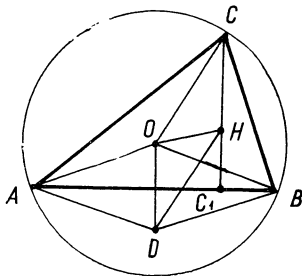


Рис. 20

Если повторить построение, начиная с векторов  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OC}$ , то получится та же точка  $H$ , но теперь она принадлежит высоте треугольника, проведенной из вершины  $B$ . Аналогично получим, что точка  $H$  принадлежит высоте, проведенной из вершины  $A$ . Тем самым еще одним способом доказано, что высоты треугольника  $ABC$  пересекаются в одной точке  $H$ , причем

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Решение 2. Согласно условию задачи имеем:

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \quad \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OC}^2,$$

или

$$(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \quad (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

Вычтем из первого равенства второе и получим:

$$(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

Аналогично, докажем, что

$$(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

А так как векторы  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{AC}$  неколлинеарны, то

$$\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

Решение 3. Примем точку  $O$  за начало прямоугольной системы координат, а оси  $Ox$  придадим направление вектора  $\overrightarrow{AB}$ . Тогда координаты точек можно обозначить так:  $A(-a; -b)$ ,  $B(a; -b)$ ,  $C(c; d)$ ,  $H(c; y_0)$ .

Поскольку  $\overrightarrow{BC} = (c - a; b + d)$ , то уравнение прямой  $AH$  имеет вид:

$$(c - a)(x + a) + (b + d)(y + b) = 0.$$

Подставив в это уравнение  $x = c$ , найдем ординату  $y_0$  точки  $H$ :

$$y_0 = \frac{a^2 - c^2 - b^2 - bd}{b + d}.$$

А так как  $OA = OC$ , то  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ . После упрощений получим:

$$y_0 = d - 2b.$$

Итак,  $\overrightarrow{OH} = (c; d - 2b)$ . Легко проверить, что вектор  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$  имеет такие же координаты, следовательно,

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

43. Решение 1. Если углы  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  острые (рис. 21), то

$$\angle AHB + \angle ACB = 180^\circ.$$

Пусть точка  $H'$  симметрична  $H$  относительно середины  $D$  стороны  $AB$ . Тогда  $\angle AH'B = \angle AHB$ , поэтому

$$\angle AH'B + \angle ACB = 180^\circ.$$

Следовательно, точки  $A, B, C$  и  $H'$  принадлежат одной окружности.

Если угол  $A$  треугольника тупой, доказательство аналогично.

Легко проверить, что доказываемое утверждение верно и для прямоугольного треугольника.

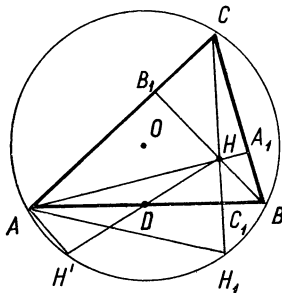


Рис. 21

Р е ш е н и е 2. Отрезки  $HN'$  и  $AB$  имеют общую середину, следовательно,

$$\overline{ON'} + \overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB}.$$

Будем считать, что  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Тогда согласно задаче 42 имеем:

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Подставив выражение  $\overline{OH}$  в предыдущее равенство, получим:

$$\overline{ON'} = -\overline{OC}.$$

Следовательно, точки  $C$  и  $H'$  — концы диаметра описанной окружности.

Р е ш е н и е 3. Введем прямоугольную систему координат так же, как при решении 3 задачи 42. Тогда  $H(c; d - 2b)$ ,  $D(0; -b)$ . По формуле середины отрезка находим, что  $H'(-c; -d)$ . А так как  $C(c; d)$ , то  $\overline{OH'} = -\overline{OC}$ .

44. Р е ш е н и е 1. Пусть  $CC_1$  — высота непрямоугольного треугольника  $ABC$  и  $\angle B < 90^\circ$  (рис. 21). Если  $H_1$  — точка пересечения прямой  $CC_1$  с описанной окружностью, то  $\angle BAH = \angle BCH_1 = \angle BAH_1 = 90^\circ - \angle B$ . Следовательно, прямоугольные треугольники  $AC_1H$  и  $AC_1H_1$  равны,  $HC_1 = C_1H_1$ , то есть точки  $H$  и  $H_1$  симметричны относительно прямой  $AB$ .

Р е ш е н и е 2. Пусть  $CC_1$  — высота треугольника  $ABC$  и прямая  $CC_1$  пересекает описанную около треугольника окружность с центром  $O$  в точке  $H_1$ . Проведем  $OD \perp AB$  и  $OE \perp CH$ . Тогда  $D$  и  $E$  — середины хорд  $AB$  и  $CH_1$ . Поэтому

$$\overline{OC_1} = \overline{OD} + \overline{OE} = \frac{1}{2} (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OH_1}).$$

А так как согласно задаче 42:

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC},$$

то

$$\overline{OC_1} = \frac{1}{2} (\overline{OH} + \overline{OH_1}).$$

Значит,  $C_1$  — середина отрезка  $HH_1$ .

Р е ш е н и е 3. Пусть точка  $H_1$  симметрична ортоцентру  $H$  треугольника  $ABC$  относительно прямой  $AB$  (рис. 21). Тогда  $DC_1$  — средняя линия треугольника  $HH_1H'$ . Следовательно,  $\angle CH_1H' = \angle HC_1D = 90^\circ$ . В решении задачи 43 доказано, что  $CH'$  — диаметр описанной окружности. Значит, точка  $H'$  принадлежит этой окружности.

45. Р е ш е н и е 1. Пусть  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  — медианы треугольника  $ABC$ . Тогда при гомотетии с центром в точке  $M$  и коэффициентом  $k = -\frac{1}{2}$  треугольник  $ABC$  отображается на треугольник  $A_1B_1C_1$ , и образом ортоцентра  $H$  треугольника  $ABC$  является ортоцентр треугольника  $A_1B_1C_1$ , то есть центр  $O$  окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Следовательно,

$$\overline{MO} = -\frac{1}{2} \overline{MH}, \text{ или } \overline{OH} = 3\overline{OM}.$$

Р е ш е н и е 2. Воспользуемся результатом задачи 42 и формулой центроида треугольника:

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}; \quad \overline{OM} = \frac{1}{3} (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}).$$

Отсюда

$$\overline{OH} = 3\overline{OM}.$$

Решение 3. Введем прямоугольную систему координат с началом в центре  $O$  окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Положим:

$A(-a; -b)$ ,  $B(a; -b)$ ,  $C(c; d)$ . Тогда  $H(c; d - 2b)$  и  $M\left(\frac{c}{3}; \frac{d - 2b}{3}\right)$ .

Значит,  $\overline{OH} = 3\overline{OM}$ .

46. Решение 1. Пусть  $M_1, M_2, M_3$  — середины сторон  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$ ;  $H_1, H_2, H_3$  — основания высот, проведенных из вершин  $A, B, C$ ; точка  $H$  — ортоцентр треугольника;  $E_1, E_2, E_3$  — середины отрезков  $AH, BH, CH$ .

Докажите, что точки  $E_1, E_2, M_1, M_2$  являются вершинами прямоугольника. Затем рассмотрите четырехугольник  $E_1E_3M_1M_3$  и треугольник  $E_1H_1M_1$ .

Решение 2. Пользуясь векторами, докажите, что середины отрезков  $E_1M_1, E_2M_2$  и  $E_3M_3$  совпадают. Если  $O_1$  — общая середина этих отрезков,

то  $\overline{OO_1} = \frac{1}{2}\overline{OH}$  и  $\overline{O_1E_1} = \frac{1}{2}\overline{OA}$ ,  $\overline{O_1E_2} = \frac{1}{2}\overline{OB}$ ,  $\overline{O_1E_3} = \frac{1}{2}\overline{OC}$ . Отсюда вы-

ведите, что  $E_1M_1, E_2M_2, E_3M_3$  — диаметры окружности с центром  $O_1$  в середине отрезка  $OH$ . Точки  $H_1, H_2, H_3$  также принадлежат этой окружности, так как  $\angle E_1H_1M_1 = \angle E_2H_2M_2 = \angle E_3H_3M_3 = 90^\circ$ .

Решение 3. Постройте точки, симметричные ортоцентру  $H$  треугольника  $ABC$  относительно середин его сторон, и точки, симметричные  $H$  относительно прямых  $BC, CA, AB$ . Эти точки принадлежат окружности, описанной около треугольника  $ABC$  (задачи 43 и 44, с. 37). Затем примените гомоте-  
тию с центром  $H$  и коэффициентом  $\frac{1}{2}$ .

47. Решение 1. Проведите перпендикуляры  $MP$  и  $MQ$  к сторонам  $AB$  и  $BC$  квадрата. Докажите, что треугольники  $MAP$  и  $MNQ$  равны.

Решение 2. Обозначив  $AB = a$ , используя теорему косинусов, докажите, что

$$AM^2 = MN^2 = \frac{5}{9}a^2, AN^2 = \frac{10}{9}a^2.$$

Решение 3. Установите, что

$$\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AD}; \overline{MN} = \frac{2}{3}\overline{AB} - \frac{1}{3}\overline{AD}.$$

Откуда

$$\overline{AM} \cdot \overline{MN} = 0.$$

Решение 4. Введите прямоугольную систему координат:  $A(0; 0)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $D(0; 1)$ . Вычислите угловые коэффициенты прямых  $AM$  и  $MN$ .

48. Решение 1. Пусть  $ABCD$  — четырехугольник, вписанный в окружность,  $AC$  — диаметр окружности,  $E$  и  $F$  — ортогональные проекции точек  $A$  и  $C$  на диагональ  $BD$ . Продолжив отрезок  $AE$  до пересечения с окружностью в точке  $K$ , докажите, что  $EFCK$  — прямоугольник и  $BK = CD$ .

Решение 2. Воспользуйтесь подобием двух пар прямоугольных треугольников:  $ABE$  и  $BCF$ ,  $CFD$  и  $DAE$ .

Решение 3. Обозначив  $\angle BAC = \angle BDC = \alpha$  и  $\angle ABD = \angle ACD = \beta$ , докажите, что

$$BE = DF = AC \cos \alpha \cos \beta.$$

49. Решение 1. Обозначим  $AB = a$  и  $\angle BAN = \alpha$ . Тогда  $\angle AMD = 90^\circ + \alpha$ . Из треугольника  $AMD$  по теореме синусов найдем, что

$$AM = \frac{a}{\sqrt{2} \cos \alpha}.$$

Из треугольника  $ABN$  имеем:

$$AN = \frac{a}{\cos \alpha}.$$

Следовательно,

$$\frac{AN}{AM} = \sqrt{2}.$$

А так как  $\angle MAN = \angle DAC = 45^\circ$ , то треугольники  $AMN$  и  $ADC$  подобны, и, значит  $\angle AMN = 90^\circ$ .

Решение 2. Треугольники  $ACN$  и  $ADM$  подобны, так как два угла одного соответственно равны двум углам другого треугольника. Поэтому

$$\frac{AN}{AM} = \frac{AC}{AD}.$$

Следовательно, треугольники  $AMN$  и  $ADC$  также подобны.

Решение 3. Так как  $\angle MAN = \angle MBN = 45^\circ$  и отрезок  $AB$  лежит по одну сторону от прямой  $MN$ , то около четырехугольника  $AMNB$  можно описать окружность. Поэтому

$$\angle AMN = 180^\circ - \angle ABN = 90^\circ.$$

50. Решение 1. Докажите, что  $CM \perp DN$ . Около четырехугольника  $AMPD$  опишите окружность и установите, что  $\angle APD = \angle ADP$ . Значит,  $AP = AD$ .

Решение 2. Пусть прямые  $AD$  и  $CM$  пересекаются в точке  $E$ . Докажите, что  $AP$  — медиана прямоугольного треугольника  $DEP$ .

Решение 3. Положите  $AB = a$  и вычислите  $DP$ . Затем, пользуясь теоремой косинусов, установите, что  $AP = a$ .

51. Решение 1. Пусть прямые  $PM$  и  $PN$  пересекают стороны  $AD$  и  $AB$  квадрата соответственно в точках  $K$  и  $L$ . Докажите, что поворот с центром в середине отрезка  $DP$  на  $90^\circ$  отображает треугольник  $AKP$  на треугольник  $MPN$ .

Решение 2. Установите, что треугольники  $AKP$  и  $MPN$  равны. Обозначив через  $Q$  точку пересечения прямых  $AP$  и  $MN$ , докажите, что  $\angle PQM = 90^\circ$ .

Решение 3. Пусть  $\overline{AK} = k\overline{AD}$  и  $\overline{AL} = l\overline{AB}$ . Тогда

$$\overline{AP} = k\overline{AD} + l\overline{AB}; \quad \overline{MN} = l\overline{AD} - k\overline{AB}.$$

Отсюда выведите, что  $\overline{AP} \cdot \overline{MN} = 0$  и  $AP = MN$ .

52. Решение 1. Пусть прямая  $SM$  пересекает сторону  $CD$  в точке  $N$ . Обозначив  $\angle BAC = \angle BDC = \alpha$  и  $\angle ABD = \angle ACD = \beta$ , найдем, что  $\angle DSN = \angle BSM = \beta$ . Но  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , следовательно,  $\angle DNS = 90^\circ$ .

Решение 2. Пусть  $O$  — центр данной окружности. Тогда

$$OS = \frac{1}{2} (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}).$$

А так как  $\overline{OM} = \frac{1}{2} (\overline{OA} + \overline{OB})$ , то

$$\overline{MS} = \overline{OS} - \overline{OM} = \frac{1}{2} (\overline{OC} + \overline{OD}).$$

Следовательно,

$$\overline{MS} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} (\overline{OC} + \overline{OD}) \cdot (\overline{OD} - \overline{OC}) = 0,$$

то есть  $MS \perp CD$ .

Решение 3. Пусть  $K$  — середина стороны  $CD$ . Тогда

$$\overline{OK} = \frac{1}{2} (\overline{OC} + \overline{OD}).$$

Согласно второму решению этой задачи имеем:

$$\overline{MS} = \frac{1}{2} (\overline{OC} + \overline{OD}).$$

Следовательно,  $\overline{MS} = \overline{OK}$ . Но  $OK \perp CD$ , поэтому  $MS \perp CD$ .

Решение 4. Пусть  $R$  — радиус данной окружности. Имеем:

$$OK^2 = R^2 - \frac{1}{4} CD^2, \quad SM^2 = \frac{1}{4} AB^2.$$

Нетрудно доказать, что  $AB^2 + CD^2 = 4R^2$ . Значит,  $SM = OK$ . Аналогично  $SK = OM$ . Поэтому  $SKOM$  — параллелограмм.

53. Решение 1. Пусть прямая  $CM$  пересекает отрезок  $A_1B_1$  в точке  $M_1$ . Постройте точку  $D$ , симметричную точке  $C$  относительно  $M$ . Докажите, что треугольники  $ACD$  и  $CA_1B_1$  равны, и поэтому  $\angle CA_1B_1 = \angle ACD = \alpha$ . Следовательно,  $\angle A_1CM_1 = 90^\circ - \alpha$  и  $\angle A_1M_1C = 90^\circ$ .

Решение 2. Поверните треугольник  $CAD$  вокруг центра  $O$  квадрата  $ACA_1A_2$  на  $90^\circ$  и докажите, что он отобразится на треугольник  $A_1CB_1$ .

Решение 3. Поверните треугольник  $ABC$  вокруг точки  $C$  на  $90^\circ$  так, чтобы точка  $B$  совпала с точкой  $B_1$ . Тогда точка  $A$  отобразится на некоторую точку  $K$ , середина  $M$  стороны  $AB$  — на середину  $L$  отрезка  $B_1K$ . До-

кажите, что  $CL \parallel A_1B_1$  и  $CL = \frac{1}{2} A_1B_1$ . Остается принять во внимание, что  $CM \perp CL$  и  $CM = CL$ .

#### Задачи на построение

54. Решение 1. Пусть  $h$  — высота равнобедренного треугольника  $ABC$ , проведенная к его основанию  $AB$ ,  $h_1$  — высота, проведенная к боковой стороне. Используя теорему Пифагора и подобие треугольников, докажите, что

$$AB = \frac{2hh_1}{\sqrt{4h^2 - h_1^2}}, \quad h_1 < 2h.$$

Затем постройте сторону  $AB$  искомого треугольника.

Решение 2. Пусть  $AC = BC = b$  и  $AB = c$ . Тогда  $ch = bh_1$ , откуда

$$\frac{b}{c} = \frac{h}{h_1}.$$

Значит, искомый треугольник подобен равнобедренному треугольнику с основанием  $h_1$  и боковой стороной  $h$ .

Решение 3. Обозначив  $\angle BAC = \alpha$ , выразите двумя способами длину стороны  $AB$  и составьте уравнение:

$$2h \operatorname{ctg} \alpha = \frac{h}{\sin \alpha},$$

откуда

$$\cos \alpha = \frac{h_1}{2h}.$$

Решение 4. Пусть  $CD$  — высота треугольника  $ABC$ . Проведите перпендикуляр  $DH$  к стороне  $BC$ . Тогда  $DH = \frac{1}{2} h_1$ , и треугольник  $CDH$  можно построить.

55. Решение 1. На отрезке  $MN$ , как на диаметре, построим окружность. Полуокружность, лежащую с вершиной  $A$  по одну сторону от прямой  $MN$ , разделим точкой  $E$  пополам. Прямая  $AE$  пересечет вторую полуокружность в искомой точке  $C$ .

Решение 2. Пусть поворот вокруг точки  $A$  на  $90^\circ$  отображает треугольник  $ABM$  на треугольник  $ADM_1$ . Тогда точка  $M_1$  будет принадлежать прямой  $CD$ . Построив ее, получим две точки  $M_1$  и  $N$  искомой прямой  $CD$ .

Решение 3. Введем обозначения:  $AM = m$ ,  $AN = n$ ,  $\angle MAN = \alpha$  и  $\angle BAM = x$ . Из прямоугольных треугольников  $ABM$  и  $ADN$  имеем:

$$AB = m \cos x, \quad AD = n \sin (\alpha + x).$$

Получим уравнение

$$n \sin (\alpha + x) = m \cos x,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = \frac{m - n \sin \alpha}{n \cos \alpha}.$$

Для построения угла  $BAM$  проведем высоту  $NL$  треугольника  $AMN$ . Тогда  $LN = n \sin \alpha$  и  $AL = n \cos \alpha$ .

Решение 4. Воспользуемся следующим свойством: если отрезок  $NK$  с концом  $K$  на прямой  $AB$  перпендикулярен отрезку  $AM$ , то  $NK = AM$ .

56. Решение 1. Пусть  $ABCD$  — искомый квадрат (рис. 22). Централно-подобный поворот с центром  $M$  и коэффициентом подобия  $k = 2$  отображает прямую  $BC$  на прямую  $CD$ , а точку  $P$  — на точку  $P_1$ , принадлежащую прямой  $CD$ . Построив точку  $P_1$ , получим прямую  $P_1Q$ , которая содержит сторону  $CD$  квадрата.

Решение 2. Построим точку  $N$ , симметричную точке  $P$  относительно  $M$ , а также точку  $S$  такую, что  $PS = MQ$  и  $PS \perp MQ$ . Тогда прямая  $NS$  содержит сторону  $AD$  квадрата.

Решение 3. Построим на луче  $MP$  точку  $K$  так, чтобы  $MK = 2MP$ , и точку  $L$  так, чтобы отрезки  $QL$  и  $MK$  были равны и перпендикулярны. Получим прямую  $LM$ , содержащую сторону  $AB$  квадрата.

57. Решение 1. Пусть  $ABCD$  — искомый квадрат и  $K, L, M, N$  — точки, принадлежащие сторонам  $AB, BC, CA, AD$  квадрата. Опишем около треугольника  $BKL$  окружность. Так как диагональ  $BD$  делит угол  $B$  квадрата пополам, то она делит пополам и полуокружность  $KL$ , не содержащую точку  $B$ . Аналогично докажем, что диагональ  $BD$  делит пополам полуокружность с концами  $M$  и  $N$ . Построив середины этих полуокружностей, получим прямую, пересекающую окружности вторично в точках  $B$  и  $D$ .

Решение 2. Введем обозначения:  $KM = m$ ,  $LN = n$ ,  $\angle \overline{KM} = \varphi$  и  $\angle BKM = x$ . Выразив длину стороны квадрата двумя способами, получим уравнение

$$n \cos (\varphi + x) = -m \sin x.$$

Откуда

$$\operatorname{ctg} x = \frac{n \sin \varphi - m}{n \cos \varphi}.$$

Решение 3. Построим отрезок  $NP$ , перпендикулярный отрезку  $KM$  и равный ему. Тогда точка  $P$  принадлежит стороне  $BC$  искомого квадрата (или ее продолжению).

## § 5. Вычисление расстояний и углов

58.  $90^\circ$ .

Решение 1. На луче  $AC$  постройте точку  $D$  так, чтобы  $AD = 2AC$ , и рассмотрите треугольник  $ABD$ .

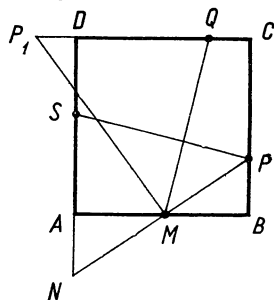


Рис. 22



Решение 2. Пользуясь теоремой косинусов, докажите, что  $AC = \sqrt{3}$ .

Решение 3. Докажите, что треугольник  $ABC$  подобен прямоугольному треугольнику с острым углом  $60^\circ$ .

59.  $\sqrt{3}$ .

Решение 1. Пусть  $\angle BAM = \alpha$ , тогда и  $\angle CBM = \alpha$ . По теореме косинусов найдем, что  $AB = \sqrt{7}$  и  $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$ . Затем применим теорему

косинусов к треугольнику  $BCM$  и получим  $CM = \sqrt{3}$ .

Решение 2. Пусть  $D$  — середина отрезка  $BM$ . Соединим ее с вершиной  $C$  треугольника  $ABC$ . Получим треугольник  $BCD$ , равный треугольнику  $ABM$  (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно,  $CD = 2$  и  $\angle BDC = 120^\circ$ . Рассмотрим треугольник  $CDM$ . Так как  $DM = 1$ ,  $CD = 2$  и  $\angle CDM = 60^\circ$ , то  $\angle CMD = 90^\circ$  (задача 58). По теореме Пифагора найдем, что  $CM = \sqrt{3}$ .

Решение 3. Соединим середину  $D$  отрезка  $BM$  с вершиной  $A$  треугольника  $ABC$ . Получим треугольник  $ABD$ , равный треугольнику  $ACM$ . Следовательно,  $AD = CM$ . Из равнобедренного треугольника  $ADM$  найдем, что  $AD = \sqrt{3}$ .

Решение 4. Повернем треугольник  $ABM$  вокруг точки  $A$  на  $60^\circ$  так, чтобы вершина  $B$  совпала с вершиной  $C$ . Пусть точка  $M$  отобразится на точку  $N$ . Треугольник  $AMN$  — равносторонний, значит,  $MN = AM = 1$ . Рассмотрим треугольник  $CMN$ . Так как  $CN = BM = 2$  и  $\angle CNM = 60^\circ$ , то  $\angle CMN = 90^\circ$  и  $CM = \sqrt{3}$ .

60.  $\frac{1}{4}c$ .

Решение 1. Постройте точку  $B_1$ , симметричную точке  $B$  относительно точки  $C$ . Проведите высоту  $B_1K$  треугольника  $ABB_1$  и докажите, что

$$CD = \frac{1}{2} B_1K = \frac{1}{4} c.$$

Решение 2. Проведите медиану  $CM$  треугольника  $ABC$  и рассмотрите треугольник  $CDM$ .

Решение 3. Докажите, что

$$CD = \frac{1}{2} c \sin 2\alpha,$$

где  $\alpha = \angle A$ .

61.  $30^\circ$ .

Решение 1. Проведите высоту  $CD$  треугольника  $ABC$  и перпендикуляр  $MK$  к стороне  $AC$ . Докажите, что треугольники  $CDM$ ,  $CKM$  и  $AKM$  равны.

Решение 2. Пусть  $CD$  — высота треугольника  $ABC$ . Положите  $DM = 1$ , тогда  $AM = 2$ . Вычислите  $CD$  и  $\angle CMD$ .

Решение 3. Через точку  $M$  проведите прямую, параллельную высоте  $CD$  треугольника  $ABC$ . Обозначив точку ее пересечения со стороной  $AC$  через  $N$ , докажите, что  $MN = CN$ .

Решение 4. Так как  $\angle CAD = 30^\circ$  и  $CD$  — катет прямоугольного треугольника  $ACD$ , то

$$\frac{CD}{AC} = \frac{DM}{AM} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,  $CM$  — биссектриса треугольника  $ACD$ .

Решение 5. Постройте точку  $C_1$ , симметричную точке  $C$  относительно стороны  $AB$ . Докажите, что  $M$  — центр равностороннего треугольника  $ACC_1$ .

Решение 6. Обозначьте  $\angle ACM = x$ . Тогда  $\angle BCM = 120^\circ - x$ . Так как площадь треугольника  $BCM$  в два раза больше площади треугольника  $ACM$ , то

$$\frac{\sin(120^\circ - x)}{\sin x} = 2,$$

откуда  $x = 30^\circ$ .

62.  $15^\circ$ .

Решение 1. Пусть  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Тогда  $\angle AOB = 120^\circ$ ,  $\angle BOC = 90^\circ$ . Докажите, что прямая  $OC$  проходит через точку  $P$ , поэтому  $\angle AOP = 30^\circ$ , а  $\angle ACP = 15^\circ$ .

Решение 2. Обозначив  $\angle BCM = x$ , составьте уравнение

$$\frac{\sin(60^\circ - x)}{\sin x} = \frac{\sin 45^\circ}{2 \sin 75^\circ}.$$

Решение 3. Применяя теорему синусов, найдите  $\frac{BC}{BP}$  и докажите, что треугольники  $BSP$  и  $ABC$  подобны.

Решение 4. Докажите, что

$$\frac{AC}{AP} = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 15^\circ}.$$

Отсюда выведите, что треугольник  $ACP$  подобен треугольнику с углами  $120^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $15^\circ$ .

63.  $30^\circ$ .

Решение 1. Через середину стороны  $AB$  проведите к  $AB$  перпендикуляр и постройте на нем точку  $O$  так, чтобы  $\angle ABO = 15^\circ$  и  $\angle OBC = 60^\circ$ . Докажите, что  $O$  — центр описанной около треугольника  $ABC$  окружности.

Решение 2. Докажите, что  $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} 75^\circ = 2$ , и воспользуйтесь тем, что  $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ .

Решение 3. Докажите, что  $AB = AC$  (методом от противного).

Если допустить, что  $AB < AC$ , то  $\angle A > 30^\circ$ , поэтому  $2CD > AC$ , то есть  $AB > AC$ .

64.  $36^\circ$ ;  $36^\circ$ ;  $108^\circ$ .

Решение 1. Пусть  $CD$  — высота и  $AL$  — биссектриса равнобедренного треугольника  $ABC$ . Середину  $K$  отрезка  $BL$  соедините с точкой  $D$ . Тогда  $CD = \frac{1}{2} AL = DK$ . Обозначив  $\angle A = \angle B = 2x$ , докажите, что  $\angle BCD = 3x$ . Затем составьте уравнение

$$5x = 90^\circ,$$

откуда  $x = 18^\circ$ . Значит,  $\angle A = \angle B = 36^\circ$ .

Решение 2. Постройте точку  $E$  так, чтобы получился ромб  $ACBE$ . Тогда  $CE = AL$ . Пусть  $M$  — точка пересечения прямых  $CD$  и  $AL$ . Докажите, что  $CM = LM$ . Обозначив  $\angle BAC = 2x$ , выразите через  $x$  равные углы треугольника  $CLM$  и составьте уравнение

$$3x = 90^\circ - 2x.$$

Решение 3. Обозначив  $\angle CAL = x$ , примените к треугольнику  $ACL$  теорему синусов. Составьте уравнение

$$\sin 3x = \cos 2x, \text{ где } 0^\circ < x < 45^\circ.$$

65.  $\frac{a^2 - b^2}{b}$ ,  $b < a < 2b$ .

Решение 1. Проведите биссектрису  $AL$  треугольника  $ABC$  и воспользуйтесь тем, что треугольники  $ABC$  и  $ACL$  подобны, а треугольник  $ABL$  равнобедренный.

Решение 2. На продолжении стороны  $AB$  за точку  $A$  постройте точку  $D$  такую, чтобы  $AD = AC$ . Докажите, что треугольник  $BCD$  — равно-

бедренный. Используя подобие треугольников  $BCD$  и  $ACD$ , составьте пропорцию

$$\frac{b+c}{a} = \frac{a}{b},$$

откуда

$$c = \frac{a^2 - b^2}{b}.$$

**Решение 3.** К треугольнику  $ABC$  примените теорему синусов. Докажите, что

$$\cos B = \frac{a}{2b}, \quad c = \frac{b \sin 3B}{\sin B} = b(4 \cos^2 B - 1).$$

Отсюда

$$c = \frac{a^2 - b^2}{b}.$$

66.  $20^\circ$ .

**Решение 1.** Повернем треугольник  $AMC$  вокруг точки  $C$  на  $60^\circ$  так, чтобы точка  $A$  совпала с точкой  $B$ . Тогда образом точки  $M$  будет точка  $N$  — вершина равностороннего треугольника  $CMN$ . А так как  $\angle BMN = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$ , то треугольники  $BCM$  и  $BNM$  равны, в силу чего  $BC = BN$ . Значит,  $AC = AM$  и  $\angle ACM = \angle AMC = 20^\circ$ .

**Решение 2.** Обозначим  $\angle ACM = x$ . Применив к треугольникам  $ACM$  и  $BCM$  теорему синусов, получим

$$\frac{CM}{AC} = \frac{\sin(20^\circ + x)}{\sin 20^\circ}, \quad \frac{CM}{BC} = \frac{\sin(90^\circ - x)}{\sin 30^\circ}.$$

Отсюда

$$\sin(20^\circ + x) = 2 \sin 20^\circ \cos x,$$

или

$$\sin(20^\circ - x) = 0, \quad 0^\circ < x < 90^\circ.$$

Значит,  $x = 20^\circ$ .

**Решение 3.** Построим окружность с центром  $A$ , проходящую через точки  $B$  и  $C$ . Так как  $\angle BAC = 60^\circ$ , а  $\angle BMC = 30^\circ$ , то эта окружность пройдет и через точку  $M$ . Значит,  $AC = AM$  и  $\angle ACM = 20^\circ$ .

67.  $20^\circ$ .

**Решение 1.** Пусть биссектриса угла  $ACB$  пересекает луч  $AM$  в точке  $O$ . Треугольники  $ACO$  и  $BCO$  симметричны относительно прямой  $CO$ , поэтому  $\angle CBO = 10^\circ$ ,  $\angle BOC = \angle AOC = 120^\circ$ . Далее находим, что  $\angle BOM = 120^\circ$  и  $\angle OBM = 10^\circ$ . Значит, треугольники  $BCO$  и  $БМО$  равны. Следовательно,  $BC = BM$  и  $\angle BCM = \angle BMC = 80^\circ$ .

**Решение 2.** Применив теорему синусов к треугольнику  $ABM$ , получим

$$\frac{AB}{BM} = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ} = 2 \sin 50^\circ.$$

А так как  $\frac{AB}{BC} = 2 \sin 50^\circ$ , то  $BM = BC$ . Значит,  $\angle BCM = \angle BMC = 80^\circ$ .

**Решение 3.** Построим точку  $N$ , симметричную точке  $M$  относительно прямой  $AB$ . Так как  $\angle ANB = \angle AMB = 130^\circ$  и  $\frac{1}{2} \angle ACB = 50^\circ$ , то точки  $A, B, N$  принадлежат окружности с центром  $C$ . Значит,  $CA = CN$ . А так как треугольник  $AMN$  — равносторонний, то  $\angle ACM = \angle MCN = 20^\circ$ .

68. Если  $\angle A > \angle B$ , то  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ .

**Решение 1.** Проведите перпендикуляр  $MN$  к стороне  $BC$  и докажите, что  $\frac{MN}{MB} = \frac{1}{2}$ .

Решение 2. Докажите, что  $AN = HM = \frac{1}{2} MB$ , поэтому  $\frac{CH}{CB} = \frac{1}{2}$  в силу свойства биссектрисы треугольника  $BCH$ .

Решение 3. Постройте треугольник  $ABD$ , симметричный данному относительно стороны  $AB$ . Докажите, что треугольник  $BCD$  — равнобедренный.

Решение 4. Обозначив  $\angle ACH = x$ , составьте уравнение

$$3 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x, \quad 0^\circ < 2x < 90^\circ.$$

69. Если  $\angle A > \angle B$ , то  $\angle B = 22,5^\circ$ ;  $\angle C = 90^\circ$ .

Решение 1. Введите обозначения:  $AN = HL = x$ ,  $LM = y$ . Тогда  $MB = 2x + y$ .

Заметив, что  $CM$  биссектриса треугольника  $BCL$ , запишите равенство

$$\frac{CL}{CB} = \frac{y}{2x + y}.$$

Аналогично

$$\frac{CA}{CB} = \frac{x}{x + y}.$$

А так как  $CL = CA$ , то

$$\frac{y}{2x + y} = \frac{x}{x + y},$$

откуда  $\frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Значит,

$$\frac{CH}{CM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } \angle HCM = 45^\circ.$$

Решение 2. Обозначьте  $\angle ACH = \alpha$  и составьте уравнение

$$\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Откуда

$$2 \cos \alpha \cos 3\alpha = \cos 2\alpha,$$

или  $\cos 4\alpha = 0$ .

Решение 3. Опишите около треугольника  $ABC$  окружность. Пусть продолжение биссектрисы  $CL$  пересекает ее в точке  $D$ . Докажите, что серединные перпендикуляры хорд  $CD$  и  $AB$  пересекаются в точке  $M$ .

70.  $DM = \sqrt{2}$ ;  $\angle AMB = 105^\circ$ ;  $\angle BMC = 75^\circ$ .

Решение 1. Обозначим  $AB = a$  и  $\angle ABM = \alpha$ . Применяя теорему косинусов к треугольникам  $ABM$  и  $BCM$ , получим:

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + 1}{2a\sqrt{2}}, \quad \sin \alpha = \frac{a^2 - 1}{2a\sqrt{2}}.$$

Отсюда

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1}{2},$$

или

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{2}.$$

Значит,  $\angle ABM = 30^\circ$  и  $\angle CBM = 60^\circ$ .

Далее по теореме синусов найдем, что

$$\angle AMB = 105^\circ \text{ и } \angle BMC = 75^\circ.$$

Отсюда следует, что точка  $M$  лежит на диагонали  $AC$  квадрата и поэтому  $DM = BM = \sqrt{2}$ .

Решение 2. Треугольник  $ABM$  повернем вокруг точки  $B$  на  $90^\circ$  так, чтобы точка  $A$  совместилась с точкой  $C$ . Точка  $M$  перейдет в такую точку  $N$ ,

что  $BN = BM$  и  $\angle MBN = 90^\circ$ . Так как  $BM = \sqrt{2}$ , то  $MN = 2$ . Стороны треугольника  $CMN$  равны 1,  $\sqrt{3}$  и 2. Значит,  $\angle MCN = 90^\circ$ ,  $\angle CMN = 30^\circ$  и  $\angle MNC = 60^\circ$ . Теперь легко находим, что  $\angle AMB = \angle CNB = 105^\circ$  и  $\angle BMC = 75^\circ$ .

Далее поступаем так же, как при решении 1.

**Решение 3.** Применим параллельный перенос: построим точку  $K$  такую, что  $MK = AD$ . Получим четырехугольник  $DKCM$ , диагонали которого перпендикулярны. Следовательно,

$$DM^2 + CK^2 = CM^2 + DK^2.$$

А так как  $DK = AM = 1$ ,  $CK = BM = \sqrt{2}$ ,  $CM = \sqrt{3}$ , то  $DM = \sqrt{2}$ . Таким образом,  $DM = BM$  и точка  $M$  лежит на диагонали  $AC$  квадрата.

Обозначив  $\angle ABM = \alpha$ , по теореме синусов имеем:

$$\frac{AM}{\sin \alpha} = \frac{BM}{\sin 45^\circ}, \quad AM = 1, \quad BM = \sqrt{2},$$

откуда

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 30^\circ.$$

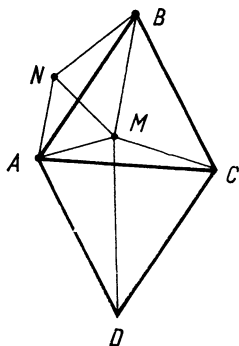


Рис. 23

71.  $45^\circ$ .

**Решение 1.** Согласно условию задачи  $MA$  — биссектриса угла  $BMN$  и  $CA$  — биссектриса угла  $BCD$ . Следовательно, точка  $A$  одинаково удалена от прямых  $BC$ ,  $MN$  и  $CD$ , поэтому  $NA$  — биссектриса угла  $MND$  (то есть точка  $A$  — центр вневписанной окружности треугольника  $CMN$ ). Теперь легко показать, что сумма двух углов треугольника  $AMN$ , прилежащих к стороне  $MN$ , равна  $135^\circ$ . Значит,  $\angle MAN = 45^\circ$ .

**Решение 2.** Проведите высоту  $AK$  треугольника  $AMN$  и докажите, что треугольники  $AKM$  и  $ABM$  равны. Затем докажите равенство треугольников  $AKN$  и  $ADN$ .

**Решение 3.** Введите обозначения:  $AB = a$ ,  $\angle BAM = \alpha$ ,  $\angle DAN = \beta$ . Вычислите последовательно длины отрезков  $BM$ ,  $MC$ ,  $CN$  и  $ND$ . Докажите, что  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (45^\circ - \alpha)$ .

**Решение 4.** При тех же обозначениях установите, что  $AM = \frac{a}{\cos \alpha}$ ,

$$AN = \frac{a}{\cos \beta}, \quad \angle AMN = 90^\circ - \alpha, \quad \angle ANM = 2\alpha + \beta.$$

Применив к треугольнику  $AMN$  теорему синусов, получите соотношение:

$$\sin (2\alpha + \beta) = \sin (90^\circ - \beta),$$

откуда  $2(\alpha + \beta) = 90^\circ$ .

72.  $\sqrt{7}$ .

**Решение 1.** Пусть  $AB = a$  и  $\angle ABM = \alpha$  (рис. 23). Тогда  $\angle CBM = 60^\circ - \alpha$ . По теореме косинусов из треугольников  $ABM$  и  $BCM$  имеем

$$4a \cos \alpha = a^2 + 3, \quad 4a \cos (60^\circ - \alpha) = a^2 + 1.$$

Вычтем из первого равенства второе. Имеем:

$$2a \cos (60^\circ + \alpha) = 1,$$

или

$$a (\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha) = 1.$$

Из первого равенства следует, что  $\cos \alpha = \frac{a^2 + 3}{4a}$ . Значит,  $\sin \alpha = \frac{a^2 - 1}{4a\sqrt{3}}$ ,

где  $1 < a < 3$ .

Воспользуемся тождеством  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  и получим уравнение

$$a^4 - 8a^2 + 7 = 0,$$

откуда  $a^2 = 7$ .

Теперь по теореме косинусов найдем, что  $\angle AMB = 120^\circ$ .

Значит,  $\angle BAM = 60^\circ - \alpha$  и  $\angle DAM = 60^\circ + \alpha$ .

Еще раз применим теорему косинусов;

$$MD^2 = a^2 + 1 - 2a \cos(60^\circ + \alpha).$$

А так как  $2a \cos(60^\circ + \alpha) = 1$ , то  $MD = a = \sqrt{7}$ .

**Решение 2.** Докажем без применения тригонометрии, что  $MD = AB$ . Введем обозначения:  $MA = x$ ,  $MB = y$ ,  $MC = z$ ,  $MD = t$  и  $AB = a$ . Пусть диагонали ромба  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Тогда  $MO$  — общая медиана треугольников  $ACM$  и  $BDM$ . По формуле, выражающей длину медианы треугольника через длины его сторон, имеем:

$$MO^2 = \frac{x^2 + z^2}{2} - \frac{a^2}{4},$$

$$MO^2 = \frac{y^2 + t^2}{2} - \frac{3a^2}{4},$$

откуда  $t^2 + y^2 - x^2 - z^2 = a^2$ .

Согласно условию задачи  $x = 1$ ,  $y = 2$  и  $z = \sqrt{3}$ . Значит,  $t = a$ .

Итак,  $MD = AD = CD$ . Значит, точки  $A$ ,  $M$  и  $C$  принадлежат окружности с центром  $D$ , поэтому  $\angle AMC = 150^\circ$ . По теореме косинусов из треугольника  $AMC$  находим, что  $AC = \sqrt{7}$ , следовательно, и  $MD = \sqrt{7}$ .

Попутно доказано следующее свойство ромба:

Если  $ABCD$  — ромб, угол  $A$ , которого равен  $60^\circ$ , и  $M$  — любая точка, то  $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2 = AB^2$ .

**Решение 3.** Интересное и краткое решение задачи получим, применив поворот вокруг точки  $A$  на  $60^\circ$ . При этом точка  $D$  совместится с точкой  $C$ , точка  $C$  — с точкой  $B$ , а точка  $M$  перейдет в некоторую точку  $N$ . По свойству поворота  $BN = CM$  и  $NC = MD$ , а так как треугольник  $AMN$  — равнобедренный, то  $MN = AM$  (рис. 23).

Найдем величину  $\angle CMN$ . Так как  $MN = 1$ ,  $BN = \sqrt{3}$  и  $BM = 2$ , то треугольник  $BMN$  является прямоугольным. Следовательно,  $\angle BNM = 90^\circ$ ,  $\angle ANB = \angle AMC = 150^\circ$  и  $\angle CMN = 360^\circ - 150^\circ - 60^\circ = 150^\circ$ .

По теореме косинусов из треугольника  $CMN$  находим, что  $CN = \sqrt{7}$ , значит, и  $MD = \sqrt{7}$ .

$$73. MN = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi}.$$

**Решение 1.** Примените параллельный перенос: постройте точки  $K$  и  $L$  так, чтобы  $\overline{MK} = \overline{AB}$  и  $\overline{ML} = \overline{DC}$ . Докажите, что  $MN$  — медиана треугольника  $KLM$ .

**Решение 2.** Середину диагонали четырехугольника  $ABCD$  соедините с точками  $M$  и  $N$ .

**Решение 3.** Докажите, что  $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC})$ , и вычислите скалярный квадрат вектора  $\overline{MN}$ .

$$74. \frac{ab}{|a-b|} \operatorname{tg} \alpha.$$

**Решение 1.** Пусть  $AB$  — большее основание трапеции  $ABCD$ ,  $AB = a$ ,  $CD = b$ ,  $AD = x$  и  $BC = y$  (рис. 24). Построим параллелограмм

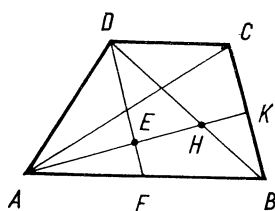


Рис. 24

$BCDF$ . Тогда  $AF = a - b$  и  $\angle ADF = \alpha$ . Из треугольника  $ADF$  по теореме косинусов находим:

$$(a - b)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha.$$

А так как диагонали трапеции перпендикулярны, то

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Следовательно,

$$ab = xy \cos \alpha.$$

Выразив двумя способами площадь треугольника  $ADF$ , получим:

$$(a - b)h = xy \sin \alpha.$$

Разделив это равенство на предыдущее, имеем:

$$\frac{(a - b)h}{ab} = \operatorname{tg} \alpha,$$

откуда

$$h = \frac{ab}{a - b} \operatorname{tg} \alpha.$$

**Решение 2.** Соотношение  $ab = xy \cos \alpha$  можно получить, выполнив следующее вспомогательное построение.

Проведем высоту  $AK$  треугольника  $ABC$  (рис. 24). Пусть она пересекает отрезок  $DF$  в точке  $E$ , а диагональ  $BD$  — в точке  $H$ . Так как  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ , то  $\angle DCH = 90^\circ$ . Заметим, что и  $\angle DEH = 90^\circ$ . Значит, около четырехугольника  $CDEH$  можно описать окружность. Тогда имеем:

$$\angle CED = \angle CHD = \angle BAC, \quad \angle ABC = \angle CDE.$$

Следовательно, треугольники  $ABC$  и  $CDE$  подобны. А так как

$$DE = x \cos \alpha,$$

то

$$\frac{a}{y} = \frac{x \cos \alpha}{b},$$

или

$$ab = xy \cos \alpha.$$

**Решение 3.** Более простое и экономное решение можно получить, применив векторное тождество

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$$

Так как  $AC \perp BD$ , то  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ . Отсюда  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ ,

или

$$ab = xy \cos \alpha.$$

Далее, поступив так же, как и при решении 1, находим что

$$(a - b)h = xy \sin \alpha.$$

## § 6. Метрические соотношения

**75. Решение 1.** Пусть на сторонах прямоугольного треугольника  $ABC$  с гипотенузой  $AB$  вне его построены квадраты  $ACDE$ ,  $BCFG$  и  $ABKL$  (рис. 25, а). Продолжив высоту  $CH$  треугольника  $ABC$  до пересечения с прямой  $KL$  в точке  $M$ , докажите, что прямоугольник  $AHML$  равновелик квадрату  $ACDE$ , а прямоугольник  $BKMH$  равновелик квадрату  $BCFG$ . Воспользуйтесь равенством треугольников  $ACL$  и  $ABE$ .

**Решение 2.** Обозначьте точки пересечения прямых  $DE$  и  $FG$ ,  $DE$  и  $AL$ ,  $FG$  и  $BK$  соответственно через  $N$ ,  $P$  и  $Q$  (рис. 25, а). Докажите, что квадрат  $ACDE$ , прямоугольник  $AHML$  и параллелограмм  $ACNP$  равновелики.

**Решение 3.** Пусть  $BC = a$ ,  $AC = b$  и  $AB = c$ . Построим квадрат  $CDEF$  со стороной, равной  $a + b$  (рис. 25, б). Площадь квадрата  $CDEF$  равна сумме площадей квадрата со стороной  $c$  и четырех прямоугольных треугольников с катетами  $a$  и  $b$ . Следовательно,

$$(a + b)^2 = c^2 + 2ab.$$

После возведения в квадрат получим:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

**Решение 4.** Высота  $CH$  прямоугольного треугольника  $ABC$  делит его на два прямоугольных треугольника  $BCH$  и  $ACH$ , подобных треугольнику  $ABC$ . Обозначив площади этих треугольников соответственно через  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S$ , докажите, что

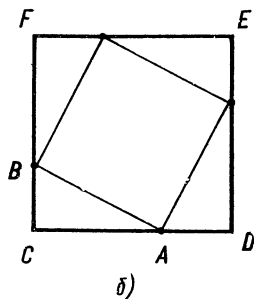
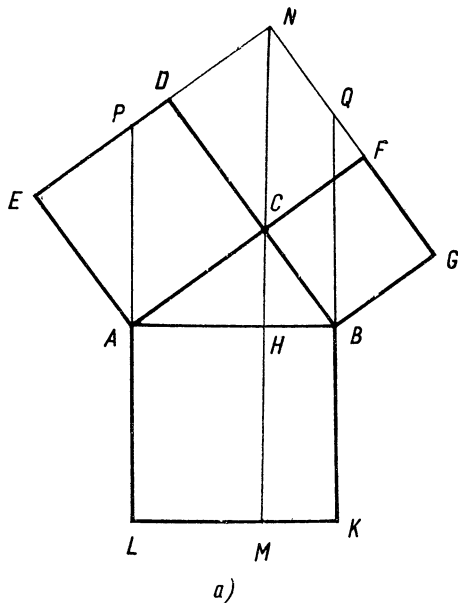


Рис. 25

$$\frac{S_1}{S} = \frac{a^2}{c^2}, \frac{S_2}{S} = \frac{b^2}{c^2}.$$

А так как  $S_1 + S_2 = S$ , то  $a^2 + b^2 = c^2$ .

**Решение 5.** Пусть окружность радиуса  $b$  с центром  $A$  пересекает прямую  $AB$  в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что  $BC$  — касательная к этой окружности, а треугольники  $BCM$  и  $BCN$  подобны. Отсюда выведите, что

$$BC^2 = BM \cdot BN, \text{ то есть } a^2 = (c - b)(c + b),$$

или

$$c^2 = a^2 + b^2$$

**76. Решение 1.** Имеем:  $\angle BCD = 90^\circ - \angle B = \angle A$ . Обозначив  $\angle A = \alpha$ , из треугольников  $BCD$  и  $ACD$  находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{m} = \frac{n}{h}.$$

Отсюда

$$h^2 = mn.$$

**Решение 2.** Около треугольника  $ABC$  опишем окружность и высоту  $CD$  продолжим до пересечения с окружностью в точке  $E$ . Так как  $AB$  — диа-



метр окружности, перпендикулярный хорде  $CE$ , то  $CD = DE$ . По теореме о пересекающихся хордах окружности получим:

$$CD \cdot DE = AD \cdot DB,$$

или

$$h^2 = mn.$$

**Решение 3.** По теореме Пифагора

$$a^2 = h^2 + m^2, \quad b^2 = h^2 + n^2.$$

Но  $a^2 + b^2 = c^2$ ,  $c = m + n$ . Следовательно,

$$(h^2 + m^2) + (h^2 + n^2) = (m + n)^2,$$

или

$$h^2 = mn$$

**Решение 4.** Пусть  $\overline{CD} = \bar{h}$ ,  $\overline{DB} = \bar{m}$  и  $\overline{DA} = \bar{n}$ .

Тогда

$$\overline{CA} = \bar{h} + \bar{n}, \quad \overline{CB} = \bar{h} + \bar{m}.$$

Так как  $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0$ ,  $\bar{h} \cdot \bar{m} = 0$  и  $\bar{h} \cdot \bar{n} = 0$ , то

$$\bar{h}^2 + \bar{m} \cdot \bar{n} = 0, \quad \text{или} \quad h^2 = mn.$$

**77. Решение 1.** Пусть  $CM$  — медиана треугольника  $ABC$ , проведенная к гипотенузе  $AB$ . Постройте точку  $D$  так, чтобы  $\overline{CD} = 2\overline{CM}$ , и докажите, что  $ACBD$  — прямоугольник.

**Решение 2.** Докажите, что медиана  $CM$  треугольника  $ABC$  равна радиусу описанной около треугольника окружности.

**Решение 3.** Построив точку  $A_1$ , симметричную  $A$  относительно прямой  $BC$ , воспользуйтесь свойством средней линии треугольника.

**Решение 4.** Середину  $N$  катета  $BC$  соедините с точкой  $M$ . Докажите, что треугольники  $BMN$  и  $CMN$  равны.

**78. Решение 1.** Рассмотрим случай, когда угол  $A$  треугольника  $ABC$  острый. Пусть угол  $B$  также будет острым. Проведем высоту  $CD$  треугольника  $ABC$ . Обозначив  $CD = h$ ,  $BD = m$ ,  $AD = n$ , по теореме Пифагора получим:

$$a^2 = h^2 + m^2 = h^2 + (c - n)^2, \quad h^2 = b^2 - n^2.$$

Отсюда

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cn.$$

Но  $n = b \cos A$ . Следовательно,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Если угол  $A$  треугольника  $ABC$  тупой, то доказательство аналогично. Легко проверить, что полученное соотношение верно и в том случае, когда угол  $A$  треугольника прямой.

**Решение 2.** Воспользуемся соотношениями:

$$c = a \cos B + b \cos A, \quad b = c \cos A + a \cos C, \quad a = b \cos C + c \cos B.$$

Умножив первое равенство на  $c$ , второе — на  $b$ , третье — на  $a$ , сложим первые два равенства и вычтем последнее. Получим:

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A,$$

или

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

**Решение 3.** Около треугольника  $ABC$  опишем окружность и через вершину  $C$  треугольника проведем прямую, параллельную стороне  $AB$ . Если  $AC > BC$ , то эта прямая пересечет окружность еще в некоторой точке  $D$ .

Получим равнобоковую трапецию  $ABCD$ , причем  $AD = BC = a$ ,  $AC = BD = b$  и  $CD = c - 2b \cos A$ . Применив к трапеции  $ABCD$  теорему Птолемея (см. с. 41), получим:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

В случае, когда  $AC < BC$ , доказательство аналогично.

Если  $AC = BC$ , то  $c = 2b \cos A$  и, как легко проверить, доказываемое соотношение также верно.

**Решение 4.** Введем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы вершины треугольника  $ABC$  имели координаты:  $A(0; 0)$ ,  $B(c; 0)$ ,  $C(m; n)$ . По формуле расстояния между двумя точками имеем

$$BC^2 = (c - m)^2 + n^2 = m^2 + n^2 + c^2 - 2cm.$$

Но  $m^2 + n^2 = b^2$ ,  $m = b \cos A$ . Следовательно,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

**79. Решение 1.** Пусть в треугольнике  $ABC$  углы  $A$  и  $B$  острые. Проведем высоту  $CD$  треугольника. Обозначим  $CD = h$ ,  $AD = x$ , тогда  $BD = c - x$ . По теореме Пифагора имеем:

$$h^2 = b^2 - x^2, \quad h^2 = a^2 - (c - x)^2.$$

Отсюда

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c},$$

$$h^2 = b^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}.$$

Полученное для  $h$  выражение преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} h^2 &= \frac{1}{4c^2} (4b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2) = \\ &= \frac{1}{4c^2} (2bc + b^2 + c^2 - a^2) (2bc - b^2 - c^2 + a^2) = \\ &= \frac{1}{4c^2} (a + b + c) (b + c - a) (a + c - b) (a + b - a) = \\ &= \frac{4}{c^2} p (p - a) (p - b) (p - c). \end{aligned}$$

Используя формулу  $S = \frac{1}{2} ch$ , получим:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

**Решение 2.** Пусть  $ABC$  — данный треугольник. Построим на лучах  $CA$  и  $CB$  соответственно точки  $D$  и  $E$  так, чтобы  $CD = CE = \sqrt{ab}$ . Тогда, согласно формуле  $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ , площадь треугольника  $CDE$  равна площади данного треугольника  $ABC$ .

Применим теорему косинусов к треугольникам  $CDE$  и  $ABC$ .  
Получим:

$$DE^2 = ab + ab - 2ab \cos C, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Отсюда

$$DE^2 = 2ab - a^2 - b^2 + c^2 = c^2 - (a - b)^2,$$

или

$$DE = 2 \sqrt{(p-a)(p-b)}.$$

По теореме Пифагора найдем высоту  $CF$  треугольника  $CDE$ :

$$CF = \sqrt{ab - (p-a)(p-b)} = \sqrt{p(p-c)}.$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} DE \cdot CF = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Р е ш е н и е 3. Воспользуемся теоремой косинусов:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C = (a+b)^2 - 2ab(1 + \cos C) = \\ &= (a+b)^2 - 4ab \cos \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.$$

Аналогично находим, что

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = ab \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Р е ш е н и е 4. Легко доказать, что

$$c^2 = (a+b)^2 - 4S \operatorname{ctg} \frac{C}{2}, \quad c^2 = (a-b)^2 + 4S \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} S \operatorname{ctg} \frac{C}{2} &= p(p-c), \\ S \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= (p-a)(p-b). \end{aligned}$$

Перемножив эти равенства почленно, получим:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Р е ш е н и е 5. Пусть окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается его сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  соответственно в точках  $L$ ,  $M$  и  $N$ . Обозначим  $AL = AN = x$ ,  $BL = BM = y$ ,  $CM = CN = z$ . Тогда имеем:

$$\begin{cases} y + z = a, \\ z + x = b, \\ x + y = c. \end{cases}$$

Отсюда находим, что

$$x = p - a, \quad y = p - b, \quad z = p - c.$$

Далее имеем:

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{ctg} \frac{B}{2} = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{z}{r}.$$

Применив тождество

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2},$$

получим:

$$\frac{x+y+z}{r} = \frac{xyz}{r^3},$$

откуда

$$pr^2 = xyz.$$

А так как  $S = pr$ , то  $S^2 = pxyz$ , или

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Решение 6. Имеем:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad 4S = 2bc \sin A.$$

В силу тождества  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ , имеем:

$$16S^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2.$$

Выражение, стоящее в правой части равенства, разложим на множители и получим

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

80. Решение 1. Пусть  $AB$  — большее основание трапеции  $ABCD$ . Проведите высоты  $DM$  и  $CN$ . Докажите, что треугольники  $ACN$  и  $BDM$  равны. Затем рассмотрите треугольники  $ADM$  и  $BCN$ .

Решение 2. Примените параллельный перенос: постройте точку  $K$  так, чтобы  $\overline{BK} = \overline{DC}$ . Рассмотрите треугольник  $ACK$ , а затем треугольники  $ABC$  и  $ABD$ .

Решение 3. Пусть диагонали трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что

$$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}, \quad \text{или} \quad \frac{AC}{CO} = \frac{BD}{DO}.$$

А так как  $AC = BD$ , то  $CO = DO$  и  $AO = BO$ . Затем рассмотрите треугольники  $AOD$  и  $BOC$ .

Решение 4. Обозначьте  $\angle BAC = \angle ACD = \alpha$ ,  $\angle ABD = \angle BDC = \beta$ . Методом от противного докажите, что  $\alpha = \beta$ .

81. Решение 1. Пусть  $AB$  — большее основание равнобокой трапеции  $ABCD$ . Из точки  $O$  пересечения диагоналей проведите перпендикуляры  $OP$  и  $OQ$  к ее основаниям. Докажите, что  $PQ$  — высота трапеции,  $PO = \frac{1}{2}AB$ ,

$$OQ = \frac{1}{2}CD \text{ и } PQ = \frac{1}{2}(AB + CD).$$

Решение 2. Проведите высоту  $CH$  трапеции  $ABCD$  и постройте точку  $K$  так, чтобы  $\overline{BK} = \overline{DC}$ . Докажите, что  $CH = AH = \frac{1}{2}AK$ .

Решение 3. Пусть  $M$  и  $N$  — середины боковых сторон  $BC$  и  $AD$  трапеции,  $CH$  — ее высота. Докажите, что  $AHMN$  — параллелограмм, поэтому  $AH = MN$ .

Решение 4. Докажите, что середины  $M$  и  $N$  боковых сторон и середины  $P$  и  $Q$  оснований трапеции являются вершинами квадрата.

82. Решение 1. Пусть  $ABCD$  — четырехугольник, вписанный в окружность. Обозначьте  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$ ,  $AC = e$ ,  $BD = f$  и  $\angle ABC = \varphi$ . Примените формулу  $AB = 2R \sin \varphi$  и докажите, что  $ef = ac + bd$ .

Решение 2. Пользуясь теоремой косинусов, выразите длины диагоналей четырехугольника через длины его сторон.

Решение 3. Постройте на отрезке  $AC$  точку  $M$  так, чтобы  $\angle ADM = \angle BDC$ . Используя подобие треугольников, докажите, что

$$AM = \frac{bd}{f} \text{ и } MC = \frac{ac}{f}.$$

83. Решение 1. Пусть  $K$  и  $L$  — середины диагоналей  $AC$  и  $BD$  четырехугольника  $ABCD$ . Середину  $M$  стороны  $AB$  соедините с точками  $K$  и  $L$ .

Убедитесь, что  $KM = \frac{1}{2}b$ ,  $LM = \frac{1}{2}d$ , а угол  $KML$  равен углу между  $\overline{BC}$  и  $\overline{AD}$ .

Применив теорему косинусов, имеем:

$$4KL = b^2 + d^2 - 2bd \cos \varphi,$$

где  $\varphi = \angle KML$ .

Воспользуемся тождеством

$$2\overline{AD} \cdot \overline{BC} = AC^2 + BD^2 - AB^2 - CD^2,$$

откуда

$$2bd \cos \varphi = e^2 + f^2 - a^2 - c^2.$$

Затем подставьте значение  $\cos \varphi$  в предыдущее равенство.

**Решение 2.** Середину  $L$  диагонали  $BD$  соедините с вершинами  $A$  и  $C$  четырехугольника. Примените формулу, выражающую длину медианы треугольника через длины его сторон.

**Решение 3.** При использовании векторов задачу можно решить без вспомогательных построений. Имеем

$$\overline{KL} = \overline{AL} - \overline{AK} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AD} - \overline{AC}),$$

$$4KL^2 = a^2 + d^2 + e^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{AD} - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} - 2\overline{AC} \cdot \overline{AD}.$$

Остается вычислить скалярное произведение в правой части равенства, в частности,

$$2\overline{AB} \cdot \overline{AD} = a^2 + d^2 - f^2.$$

Заметим, что  $ABCD$  не обязательно плоский четырехугольник. Доказываемое соотношение верно для любых четырех точек  $A, B, C, D$  пространства, если  $K$  и  $L$  — середины отрезков  $AC$  и  $BD$ .

**84. Решение 1.** Пусть  $ABCD$  — параллелограмм,  $DE$  и  $CF$  — перпендикуляры к прямой  $AB$ . Обозначив  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $DE = h$  и  $AE = x$ , по теореме Пифагора получим:

$$AC^2 + BD^2 = 2a^2 + (h^2 + x^2), \quad b^2 = h^2 + x^2.$$

Отсюда следует, что

$$AC^2 + BD^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

**Решение 2.** Применив теорему косинусов к треугольникам  $ABD$  и  $ABC$ , находим:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha,$$

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta, \quad \text{где } \alpha = \angle BAC, \beta = \angle ABC.$$

Учитывая, что  $\cos \beta = -\cos \alpha$ , сложим эти равенства и получим доказываемое соотношение.

**Решение 3.** Пусть  $\overline{AB} = \vec{a}$ ,  $\overline{AD} = \vec{b}$ . Тогда

$$\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \overline{DB} = \vec{a} - \vec{b}.$$

Следовательно,

$$AC^2 + BD^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

**Решение 4.** Воспользуемся формулой задачи 83. Равенство  $e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2$  имеет место только для параллелограмма.

**85. Решение 1.** Пусть  $AB$  — большее основание трапеции  $ABCD$ . На стороне  $AB$  построим точку  $K$  так, чтобы  $AK = DC$ . Стороны диагонали трапеции будем обозначать так же, как в задачах 82 и 83. Имеем:

$$CK = AD = d, \quad BK = AB - CD = a - c.$$

Применив теорему косинусов к треугольникам  $ABC$ ,  $BCD$  и  $BCK$ , получим:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B, \quad f^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos B,$$

$$d^2 = b^2 + (a - c)^2 - 2b(a - c) \cos B.$$

Отсюда находим:

$$e^2 + f^2 = a^2 + 2b^2 + c^2 - 2b(a - c) \cos B = b^2 + d^2 + 2ac.$$

Решение 2. Воспользуемся тождеством

$$AC^2 + BD^2 - AD^2 - BC^2 = 2\overline{AB} \cdot \overline{DC}.$$

Поскольку  $\overline{AB} \cdot \overline{DC} = ac$ , то

$$e^2 + f^2 - b^2 - d^2 = 2ac.$$

Решение 3. Пусть  $KL$  — отрезок, соединяющий середины диагоналей  $AC$  и  $BD$  трапеции. Используя свойство средней линии треугольника, найдем, что

$$KL = \frac{1}{2}(a - c).$$

По формуле Эйлера (см. с. 41) получим:

$$(a - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2,$$

или

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac.$$

86. Решение 1. Применив теорему косинусов к треугольникам  $ACD$  и  $ABC$ , получим:

$$d^2 = b^2 + n^2 - 2bn \cos A, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Из этих равенств исключим  $\cos A$ . Для этого первое равенство умножим на  $c$ , второе — на  $n$ , затем из первого вычтем второе. Учитывая, что  $m + n = c$ , после несложных преобразований получим доказываемое соотношение.

Решение 2. Обозначим  $\angle BDC = \varphi$ . По теореме косинусов применительно к треугольникам  $BCD$  и  $ACD$  имеем:

$$a^2 = d^2 + m^2 - 2dm \cos \varphi, \quad b^2 = d^2 + n^2 + 2dn \cos \varphi.$$

Умножив первое равенство на  $n$ , а второе — на  $m$ , сложим их. Тогда получим:

$$a^2n + b^2m = cd^2 + cmn.$$

Решение 3. По формуле деления отрезка в данном отношении имеем

$$\overline{CD} = \frac{m\overline{CA} + n\overline{CB}}{m + n}.$$

Так как  $m + n = c$  и  $2\overline{CA} \cdot \overline{CB} = a^2 + b^2 - c^2$ , то, вычислив скалярный квадрат вектора  $CD$ , получим

$$d^2 = \frac{1}{c^2} (a^2cn + b^2cm - c^2mn).$$

87. Решение 1. Постройте точку  $D$ , симметричную точке  $C$  относительно середины  $M$  стороны  $AB$ . Докажите, что  $ACBD$  — параллелограмм и примените теорему о сумме квадратов диагоналей параллелограмма.

Решение 2. Примените теорему косинусов к треугольникам  $ACM$  и  $ABC$ .

Решение 3. Воспользуйтесь равенствами:

$$2\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{CB}, \quad \overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA}.$$

Возведите их в квадрат, а затем сложите.

Решение 4. Примените теорему Стюарта (см. с. 42).

88. Решение 1. Пусть  $CM$  — медиана треугольника  $ABC$ . Замечив, что  $\angle ACM = \angle A$  и  $\angle BCM = \angle B$ , примените теорему о сумме углов треугольника.

Решение 2. Постройте окружность радиуса  $\frac{1}{2}c$  с центром в точке  $M$ .

Решение 3. Воспользуйтесь формулой задачи 87.

89. Решение 1. Считая углы  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  острыми, докажите, что треугольники  $BCC_1$  и  $HAC_1$  подобны. Составьте пропорцию

$$\frac{CC_1}{BC_1} = \frac{AC_1}{HC_1}.$$

Убедитесь, что доказываемое соотношение остается в силе, когда угол  $A$  треугольника  $ABC$  прямой или тупой.

Решение 2. Около треугольника  $ABC$  опишите окружность. Пусть прямая  $CC_1$  пересекает ее в точке  $H_1$ , тогда  $HC_1 = C_1H_1$  (см. задачу 44, с. 37). Воспользуйтесь тем, что произведения отрезков хорд  $AB$  и  $CH_1$  равны.

Решение 3. Воспользуйтесь тем, что

$$\overline{AH} = \overline{AC_1} + \overline{C_1H}, \quad \overline{CB} = \overline{CC_1} + \overline{C_1B} \quad \text{и} \quad \overline{AH} \cdot \overline{CB} = 0.$$

Докажите, что отсюда вытекает равенство

$$\overline{CC_1} \cdot \overline{HC_1} = \overline{AC_1} \cdot \overline{C_1B},$$

верное для любого треугольника  $ABC$ .

Если  $\angle C = 90^\circ$ , то ортоцентр  $H$  треугольника  $ABC$  совпадает с его вершиной  $C$ , и получаем знакомое из школьного курса геометрии соотношение

$$CC_1^2 = AC_1 \cdot BC_1 \quad (\text{см. задачу 76, с. 41}).$$

90. Решение 1. Установите, что  $\angle ABH = |90^\circ - \angle A|$ , а углы  $AHB$  и  $ACB$  либо равны, либо сумма их равна  $180^\circ$ . Применив к треугольнику  $ABH$  теорему синусов, имеем:

$$\frac{AH}{AB} = \frac{|\cos A|}{\sin C}.$$

Решение 2. Пусть  $CD$  — диаметр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $ADBH$  — параллелограмм и  $AH = BD$ . Из треугольника  $BCD$  найдите

$$BD^2 = 4R^2 - a^2.$$

Решение 3. Воспользуйтесь результатом задачи 42 (см. с. 37), и докажите, что

$$\overline{AH} = \overline{OB} + \overline{OC},$$

где  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Затем вычислите скалярный квадрат вектора  $\overline{AH}$ .

91. Решение 1. Рассмотрите треугольники  $ACC_1$  и  $AHC_1$ . Установите, что

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = 2.$$

Решение 2. Заметив, что  $\angle CAH = 90^\circ - \angle C$ ,  $\angle HAC_1 = 90^\circ - \angle B$ , используйте условие равенства площадей треугольников  $ACH$  и  $AC_1H$ . Докажите, что

$$AC \cos C = AC_1 \cos B.$$

Решение 3. Пусть  $AA_1$  — высота треугольника. Проведите перпендикуляр  $C_1D$  к  $AA_1$  и докажите, что  $CA_1 = C_1D$ , то есть

$$AC \cos C = AC_1 \cos B.$$

Решение 4. Примените теорему Менелая (см. с. 18) к треугольнику  $ACC_1$  и секущей  $BH$ .

Решение 5. Воспользуйтесь формулами:

$$CC_1 = 2R \sin A \sin B, \quad CH = 2R \cos C.$$

Отсюда выведите соотношение

$$2 \cos C = \sin A \sin B.$$

92. Решение 1. Пусть  $CL$  — биссектриса треугольника  $ABC$ . Через точку  $B$  параллельно прямой  $CL$  проведите прямую, пересекающую продолжение стороны  $AC$  в некоторой точке  $D$ . Докажите, что  $BC = CD$ . Затем примените теорему о пропорциональных отрезках.

Решение 2. Проведите перпендикуляры  $AE$  и  $BF$  к прямой  $CL$ . Воспользуйтесь подобием треугольников  $ACE$  и  $BCF$ ,  $AEL$  и  $BFL$ .

Решение 3. Примените теорему синусов к треугольникам  $ACL$  и  $BCL$ .

93. Решение 1. Пусть  $CL$  — биссектриса треугольника  $ABC$ . Через точку  $L$  параллельно стороне  $AC$  проведите прямую, пересекающую сторону  $BC$  в точке  $N$ . Тогда  $LN = CN$  и

$$CL = 2CN \cos \frac{C}{2}.$$

Докажите, что  $\frac{CN}{NB} = \frac{b}{a}$ , и выразите длину отрезка  $CN$  через длины сторон треугольника  $ABC$ .

Решение 2. Выразив площадь треугольника  $ABC$  двумя способами, составьте уравнение

$$al_c \sin \frac{C}{2} + bl_c \sin \frac{C}{2} = ab \sin C.$$

Решение 3. Пусть  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$  — единичные векторы — такие, что

$$\overline{CA} = b\bar{e}_1, \quad \overline{CB} = a\bar{e}_2.$$

По формуле деления отрезка в данном отношении

$$\overline{CL} = \frac{b\bar{e}_1 + \lambda a\bar{e}_2}{1 + \lambda},$$

где  $\lambda = \frac{AL}{LB}$ .

С другой стороны, так как векторы  $\overline{CL}$  и  $\bar{e}_1 + \bar{e}_2$  коллинеарны, то

$$\overline{CL} = \mu (\bar{e}_1 + \bar{e}_2).$$

Теперь, в силу единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам, получаем:

$$\mu = \frac{b}{1 + \lambda} \quad \text{и} \quad \mu = \frac{\lambda a}{1 + \lambda}.$$

Отсюда

$$\mu = \frac{ab}{a + b}, \quad \lambda = \frac{b}{a}.$$



Следовательно,

$$CL = \mu |\bar{e}_1 + \bar{e}_2| = 2\mu \cos \frac{C}{2} = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{C}{2}.$$

Кроме того, вычислив  $\lambda$ , мы попутно доказали, что

$$\frac{AL}{BL} = \frac{AC}{BC},$$

то есть получили еще одно решение задачи 92.

94. Р е ш е н и е 1. Воспользуйтесь формулами:

$$l_c = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{C}{2} \text{ и } \cos \frac{C}{2} = \frac{l_c^2 + a^2 - m^2}{2al_o}.$$

Р е ш е н и е 2. Около треугольника  $ABC$  опишите окружность. Продолжив биссектрису  $CL$  треугольника до пересечения с окружностью в точке  $D$ , докажите, что треугольники  $ACL$  и  $DCB$  подобны. Составьте пропорцию

$$\frac{l_c + x}{b} = \frac{a}{l_c},$$

где  $x = LD$ . Затем докажите, что  $l_c x = mn$ .

Р е ш е н и е 3. По теореме Стюарта (см. с. 42)

$$l_c^2 = \frac{n}{c} a^2 + \frac{m}{c} b^2 - mn.$$

Вычислите  $m$  и  $n$ , используя равенства  $m + n = c$  и  $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ .

95. Р е ш е н и е 1. Пусть отрезки  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $K$ . Докажите, что треугольники  $ACK$  и  $DBC$  подобны, поэтому

$$CD = \frac{CA \cdot CB}{CK}.$$

Затем воспользуйтесь формулой, приведенной в задаче 93 (см. с. 42), и установите, что

$$CK = \frac{CA \cdot CB}{CA + CB}.$$

Р е ш е н и е 2. Докажите, что  $AB = BD = DA$ , и примените к четырехугольнику  $ACBD$  теорему Птолемея (см. с. 41).

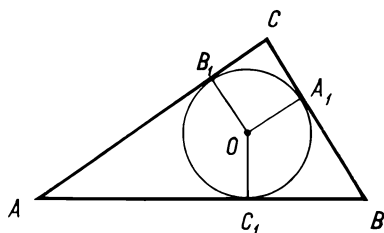


Рис. 26

Задача может быть решена и другими способами. Поскольку треугольник  $ABD$  равносторонний, то решение сводится к решению примера 4 с использованием теорем косинусов, синусов и др. (см. с. 35).

96. Р е ш е н и е 1. Пусть окружность радиуса  $r$  с центром  $O$  касается катетов и гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  в точках  $A_1, B_1, C_1$  (рис. 26). Обозначим  $BC_1 = m$  и  $AC_1 = n$ . По теореме о касательных, проведенных к окружности из одной точки,  $AB_1 =$

$AC_1 = n$ ,  $BA_1 = BC_1 = m$ . Четырехугольник  $CA_1OB_1$  является квадратом, поэтому  $CA_1 = CB_1 = r$ . Таким образом, имеем:

$$m + r = a, n + r = b, m + n = c.$$

Отсюда

$$m = \frac{c+a-b}{2}, \quad n = \frac{c+b-a}{2}, \quad r = \frac{a+b-c}{2},$$

или

$$m = p - b, \quad n = p - a, \quad r = p - c.$$

Так как  $S = pr$ , то для прямоугольного треугольника получаем:

$$S = p(p - c).$$

По формуле Герона имеем:

$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c).$$

Следовательно,

$$S^2 = S(p - a)(p - b),$$

или

$$S = mn.$$

Решение 2. Как было показано при решении 1 задачи,

$$m = \frac{c+a-b}{2}, \quad n = \frac{c+b-a}{2}.$$

Воспользуемся еще формулой  $S = \frac{1}{2}ab$  и теоремой Пифагора. Получим:

$$\begin{aligned} mn &= \frac{1}{4}(c+a-b)(c+b-a) = \frac{1}{4}(c^2 - (a-b)^2) = \\ &= \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - (a-b)^2) = \frac{1}{2}ab = S. \end{aligned}$$

Решение 3. Воспользуемся формулами

$$S = \frac{1}{2}ab \text{ и } S = pr.$$

Пусть  $BC_1 = m$  и  $AC_1 = n$ , тогда

$$2S = (m+r)(n+r), \quad S = (m+n+r)r.$$

Вычтем из первого равенства второе, получим:

$$S = mn.$$

Решение 4. Из теоремы косинусов для произвольного треугольника  $ABC$  вытекает соотношение

$$c^2 = (a-b)^2 + 4S \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

А так как  $c = m+n$ ,  $a-b = m-n$ , то

$$(m+n)^2 = (m-n)^2 + 4S \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$mn = S \operatorname{tg} \frac{C}{2},$$

или

$$S = mn \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

Если  $\angle C = 90^\circ$ ,

$$S = mn.$$

97. Решение 1. Пусть прямая  $MO$  пересекает окружность в точках  $C$  и  $D$ . Используя подобие треугольников  $MAD$  и  $MCB$ , докажите, что

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD = |OM^2 - R^2|.$$

$$MA \cdot MB = (MN - AN)(MN + BN) = MN^2 - AN^2.$$
$$MN^2 - AN^2 = OM^2 - R^2.$$

**Решение 3.** Так как

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = (\overline{NA} - \overline{NM}) (\overline{NB} - \overline{NM}) = \overline{NA} \cdot \overline{NB} - (\overline{NA} + \overline{NB}) \cdot \overline{NM} + \overline{MN}^2.$$

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = MN^2 - AN^2.$$

Решение 4. Примем точку  $M$  за начало прямоугольной системы координат. Пусть точки  $A$  и  $B$  принадлежат оси абсцисс и окружности с центром  $O(m; n)$ . Тогда координаты точек  $A$  и  $B$  найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} (x-m)^2 + (y-n)^2 = R^2, \\ y = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что  $m^2 + n^2 = OM^2$ , получим:

$$x^2 - 2mx + OM^2 - R^2 = 0.$$

Замечаем, что  $|x_1 \cdot x_2| = MA \cdot MB$ , и применяем теорему Виета.

Рис. 27

98. Решение 1. Пусть  $M$  — середина стороны  $AB$  (рис. 27). Тогда  $CM$  — медиана треугольника  $ABC$  и по формуле, приведенной в задаче 87, (см. с. 42), имеем:

$$CM^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

В то же время  $CM$  — медиана треугольника  $COD$ , поэтому

$$CM^2 = \frac{CD^2 + R^2}{2} - OM^2.$$

А так как

$$OM^2 = R^2 - \frac{c^2}{4},$$

TO

$$CM^2 = \frac{CD^2 - R^2}{2} + \frac{c^2}{4}.$$

Приравняем найденные для  $СМ$  выражения. После упрощения получим

$$CD^2 = R^2 + a^2 + b^2 - c^2.$$

**Решение 2.** Из условия задачи следует, что

$$\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{OB}.$$

## Поэтому

$$\overline{CD} = \overline{OD} - \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB} - \overline{OC}.$$

Отсюда

$$CD^2 = 3R^2 + 2\overline{OA} \cdot \overline{OB} - 2\overline{OA} \cdot \overline{OC} - 2\overline{OB} \cdot \overline{OC},$$

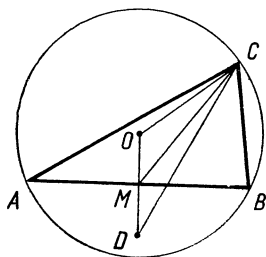


Рис. 27

Но

$$2\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - \overline{AB}^2 = 2R^2 - c^2.$$

Аналогично

$$2\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 2R^2 - b^2, \quad 2\overline{OB} \cdot \overline{OC} = 2R^2 - a^2.$$

Следовательно,

$$CD^2 = R^2 + a^2 + b^2 - c^2.$$

**Решение 3.** Пусть  $BM$  — диаметр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Если угол  $C$  треугольника острый, то  $\angle AMB = \angle C$ ,  $\angle ABD = 90^\circ - \angle C$  и  $\angle CBD = 90^\circ + \angle B - \angle C$ . Если угол  $C$  тупой, то точно так же  $\angle CBD = 90^\circ + \angle B - \angle C$ .

Для вычисления  $CD$  применим теорему косинусов и формулу  $c = 2R \sin C$ . Получим:

$$\begin{aligned} CD^2 &= R^2 + a^2 + 2aR \sin(B - C) = R^2 + a^2 + ab \cos C - ac \cos B = \\ &= R^2 + a^2 + b^2 - c^2. \end{aligned}$$

Легко проверить, что полученное соотношение верно и в том случае, когда  $\angle C = 90^\circ$ .

**99. Решение 1.** Сначала рассмотрим равнобедренный треугольник  $ABC$ . Пусть  $AC = BC$ . Тогда диаметр  $CD$  описанной окружности является осью симметрии треугольника. Центр  $O$  описанной окружности и центр  $J$  вписанной в треугольник окружности принадлежат  $CD$ .

Легко доказать, что углы треугольника  $ADJ$  при вершинах  $A$  и  $J$  равны (каждый из них равен полусумме углов  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$ ). Следовательно,  $AD = DJ$ .

Пусть окружность, вписанная в треугольник, касается стороны  $AC$  в точке  $K$ . Прямоугольные треугольники  $ACD$  и  $KCJ$  подобны, поэтому

$$\frac{CJ}{CD} = \frac{JK}{AD}.$$

Учитывая, что  $JK = r$ ,  $CD = 2R$  и  $AD = DJ$ , получим:

$$CJ \cdot DJ = 2Rr.$$

Но

$$CJ \cdot DJ = (R + d)(R - d) = R^2 - d^2.$$

Следовательно,

$$R^2 - d^2 = 2Rr,$$

откуда

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Если  $ABC$  — произвольный треугольник, то доказательство аналогично и лишь немного усложняется.

Обозначим через  $D$  точку пересечения биссектрисы угла  $C$  треугольника с описанной окружностью (рис. 28). Используя теорему об измерении вписанных углов, докажем, что  $AD = DJ$ . Через точку  $J$  проведем диаметр окружности. Тогда произведение отрезков хорды  $CD$  равно произведению отрезков диаметра. Следовательно,

$$CJ \cdot DJ = R^2 - d^2.$$

Докажем, что

$$CJ \cdot DJ = 2Rr.$$

Для этого проведем диаметр  $DE$  и, так же, как в случае равнобедренного треугольника, выведем это соотношение из подобия треугольников  $AED$  и  $KCJ$ , где  $JK \perp AC$ . Следовательно,

$$R^2 - d^2 = 2Rr.$$

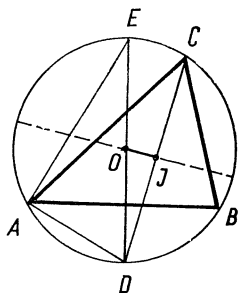


Рис. 28

Решение 2. Применив теорему Стюарта (см. с. 42) к треугольнику  $COD$ , получим:

$$d^2 = \frac{CJ}{CD} \cdot R^2 + \frac{DJ}{CD} R^2 - CJ \cdot DJ = R^2 - CJ \cdot DJ.$$

Из треугольников  $CJK$  и  $ACD$  находим:

$$CJ = \frac{r}{\sin \frac{C}{2}}, \quad AD = 2R \sin \frac{C}{2}.$$

Следовательно,

$$CJ \cdot DJ = CJ \cdot AD = 2Rr$$

и

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Решение 3. Пусть  $CL$  — биссектриса треугольника  $ABC$ . Воспользуемся свойством биссектрисы угла треугольника (см. задачу 92, с. 42), и найдем, что

$$AL = \frac{bc}{a+b}, \quad \frac{CJ}{JL} = \frac{b}{AL} = \frac{a+b}{c}.$$

Теперь, по формуле деления отрезка в данном отношении получим:

$$\overline{OJ} = \frac{a\overline{OA} + b\overline{OB} + c\overline{OC}}{2p}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} d^2 = OJ^2 &= \frac{1}{4p^2} ((a^2 + b^2 + c^2) R^2 + ab(2R^2 - c^2) + ac(2R^2 - b^2) + \\ &+ bc(2R^2 - a^2)) = R^2 - \frac{abc}{2p} = R^2 - 2Rr. \end{aligned}$$

100. Решение 1. К треугольнику  $CDJ$  применим теорему косинусов. Нетрудно доказать, что  $\angle DCJ = \frac{|\angle A - \angle B|}{2}$ , и так как

$$CJ = \frac{r}{\sin \frac{C}{2}}, \quad CD = 2R,$$

то

$$DJ^2 = 4R^2 + \frac{r^2}{\sin^2 \frac{C}{2}} - 4Rr \cdot \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}.$$

Учитывая, что  $r = 4R \sin \frac{C}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$  приведем выражение для  $DJ^2$  к виду:

$$DJ^2 = 4R^2 - 4R^2 \sin A \sin B.$$

Но  $a = 2R \sin A$ ,  $b = 2R \sin B$ . Следовательно,

$$DJ^2 = 4R^2 - ab.$$

Решение 2. Приняв центр  $O$  окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , за полюс, имеем:

$$\overline{DJ} = \overline{OJ} - \overline{OD} = \overline{OJ} + \overline{OC}.$$

Воспользуемся формулой

$$\overline{OJ} = \frac{a\overline{OA} + b\overline{OB} + c\overline{OC}}{a + b + c}$$

и получим:

$$\overline{DJ} = \frac{a\overline{OA} + b\overline{OB} + (a + b + 2c)\overline{OC}}{2p}.$$

Следовательно, воспользовавшись решением 3 задачи 99, получим:

$$DJ^2 = \frac{1}{4} p^2 (a^2 R^2 + b^2 R^2 + (a + b + 2c)^2 R^2 + ab(2R^2 - c^2) + \\ + a(a + b + 2c)(2R^2 - b^2) + b(a + b + 2c)(2R^2 - a^2)) = 4R^2 - ab.$$

Р е ш е н и е 3. По формуле Эйлера (см. с. 41), имеем:

$$OJ^2 = R^2 - 2Rr.$$

Но поскольку  $OJ$  — медиана треугольника  $CDJ$ , то

$$OJ^2 = \frac{1}{2} (CJ^2 + DJ^2) - \frac{CD^2}{4}.$$

Учитывая, что  $CJ^2 = ab - 4Rr$ , получим:

$$R^2 - 2Rr = \frac{1}{2} (ab - 4Rr) + \frac{1}{2} DJ^2 - R^2.$$

Отсюда

$$DJ^2 = 4R^2 - ab.$$

101. Р е ш е н и е 1. Сначала с помощью формулы  $2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$  доказываемое соотношение приведем к виду

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = -4 \cos A \cos B \cos C.$$

Так как сумма углов  $A$ ,  $B$  и  $C$  равна  $180^\circ$ , то  $\cos C = -\cos(A + B)$ . Учитывая это, преобразуем правую часть равенства следующим образом:

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 2 \cos(A + B) \cos(A - B) + \\ + 2\cos^2 C = -2 \cos C (\cos(A - B) + \cos(A + B)) = \\ = -4 \cos A \cos B \cos C.$$

Р е ш е н и е 2.

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C - 1 = \\ = (\cos A + \cos B \cos C)^2 - \cos^2 B \cos^2 C + \cos^2 B + \cos^2 C - 1 = \\ = (\sin B \sin C)^2 - (1 - \cos^2 B)(1 - \cos^2 C) = 0.$$

Р е ш е н и е 3. Согласно теореме косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Выполнив замену:  $a = 2R \sin A$ ,  $b = 2R \sin B$ ,  $c = 2R \sin C$ , получим:

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A.$$

Поскольку  $\cos A = -\cos(B + C) = \sin B \sin C - \cos B \cos C$ , то

$$\sin B \sin C = \cos A + \cos B \cos C.$$

Следовательно,

1 - \cos^2 A = (1 - \cos^2 B) + (1 - \cos^2 C) - 2(\cos A + \cos B \cos C) \cos A, или

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C.$$

Решение 4. Согласно теореме проекций имеем:

$$\begin{cases} a \cos B + b \cos A - c = 0, \\ -a + b \cos C + c \cos B = 0, \\ a \cos C - b + c \cos A = 0. \end{cases}$$

Исключив из системы  $a$ ,  $b$  и  $c$ , получим:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C - 1 = 0.$$

102. Решение 1. Имеем:

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C - 1 &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin^2 \frac{C}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \left( \cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Решение 2. Применим теорему косинусов и выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C - 1 &= \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - 1 \right) + \left( \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - 1 \right) + \\ &+ \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + 1 \right) = \frac{(a+b-c)(b-a-c)}{2bc} + \frac{(a+b-c)(a-b-c)}{2ac} + \\ &+ \frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2ab} = \frac{2(p-c)(cp-ap-bp+2ab)}{abc} = \\ &= \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{4S^2}{pabc} = \frac{r}{R} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Решение 3. Если  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , то имеет место равенство

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 1 = -4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

(см. решение 1 задачи 101 с. 93). Выполним замену:

$$\alpha = 90^\circ - \frac{A}{2}, \quad \beta = 90^\circ - \frac{B}{2}, \quad \gamma = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

Легко проверить, что при этом условии  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  выполняется. Получим тождество:

$$\cos A + \cos B + \cos C - 1 = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

103. Решение 1. Учитывая, что  $\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2}$ , имеем:

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C &= 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \\ &= 2 \cos \frac{A}{2} \left( \cos \frac{B+C}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Решение 2. Согласно формуле  $a = 2R \sin A$  имеем:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R}.$$

А так как  $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ , то

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{p \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc} = \frac{pS}{abc} = \frac{p}{4R}.$$

Следовательно,

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

**Решение 3.** Соединим центр  $O$  окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , с его вершинами. Тогда  $\angle AOB = 2\angle C$ , если  $\angle C \leq 90^\circ$ , и  $\angle AOB = 360^\circ - 2\angle C$ , если  $\angle C > 90^\circ$ . Легко проверить, что в любом случае справедлива формула

$$S = \frac{1}{2} R^2 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C).$$

Кроме того:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

Следовательно,

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

Применив это тождество к треугольнику с углами  $90^\circ - \frac{A}{2}$ ,  $90^\circ - \frac{B}{2}$ ,  $90^\circ - \frac{C}{2}$ , получим доказываемое соотношение.

**104.** Из первого равенства, если его умножить на  $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ , вытекает второе. Поэтому приведем доказательство лишь первого тождества.

**Решение 1.** Так как

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} = \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}},$$

то, используя тождество задачи 103 (см. с. 43), получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} \right) = \\ &= \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

**Решение 2.** Если окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается стороны  $AB$  в точке  $K$ , то  $AK = p - a$ , поэтому

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{p-a}{r}.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} &= \frac{p-a}{r} + \frac{p-b}{r} + \frac{p-c}{r} = \frac{p}{r}; \\ \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} &= \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3} = \frac{S^2}{pr^3} = \frac{S}{r^2} = \frac{p}{r}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Решение 3.** Учитывая, что  $\operatorname{tg} C = -\operatorname{tg}(A+B)$ , получаем:

$$\operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B - 1}.$$



Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

Применив это тождество к треугольнику с углами  $90^\circ - \frac{A}{2}$ ,  $90^\circ - \frac{B}{2}$ ,  $90^\circ - \frac{C}{2}$ , получим доказываемое соотношение:

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

## § 7. Геометрические неравенства. Наибольшие и наименьшие значения

105. Решение 1. Пусть  $CM$  — медиана треугольника  $ABC$ . Постройте параллелограмм  $ACBD$  и рассмотрите треугольник  $ACD$ .

Решение 2. Постройте среднюю линию  $MN$  треугольника  $ABC$  и рассмотрите треугольник  $CMN$ .

Решение 3. Воспользуйтесь векторным равенством

$$\overline{CM} = \frac{1}{2} (\overline{CA} + \overline{CB}).$$

106. Решение 1. Пусть отрезок  $MN$  соединяет середины сторон  $AD$  и  $BC$  четырехугольника  $ABCD$ . Примените параллельный перенос: постройте точки  $B_1$  и  $C_1$  так, чтобы  $\overline{BB_1} = \overline{AM}$  и  $\overline{CC_1} = \overline{DM}$ . Докажите, что  $MN$  — медиана треугольника  $B_1C_1M$ , и примените результат задачи 105.

Решение 2. Постройте точки  $D_1$  и  $M_1$ , симметричные точкам  $D$  и  $M$  относительно середины  $N$  стороны  $BC$ . Докажите, что  $AD_1 = 2MN$  и  $AD_1 \leq AB + BD_1$ .

Решение 3. Середину  $K$  диагонали  $AC$  соедините с концами отрезка  $MN$  и рассмотрите треугольник  $KMN$ .

Решение 4. Докажите, что

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{DC}).$$

Отсюда выведите неравенство

$$MN \leq \frac{1}{2} (AB + CD).$$

Решение 5. Воспользуйтесь результатом задачи 73 (см. с. 77).

107. Решение 1. Пусть  $AB$  — основание равнобедренного треугольника  $ABC$ , а  $AD$  — его медиана. Проведем высоту  $DK$  треугольника  $ABD$ . Введем обозначения:  $AD = m$ ,  $AK = x$ ,  $DK = y$ ,  $S$  — площадь треугольника  $ABC$ . Тогда имеем:

$$AB = \frac{4}{3} x, \quad S = AB \cdot DK = \frac{4}{3} xy.$$

А так как  $m^2 = x^2 + y^2 \geq 2xy$ , то  $S \leq \frac{2}{3} m^2$ ,  
причем равенство имеет место лишь при  $x = y$ .

Решение 2. Пусть  $\angle BAD = \alpha$ . Сохраняя прежние обозначения, из прямоугольного треугольника  $ADK$  находим:

$$x = m \cos \alpha, \quad y = m \sin \alpha.$$

Следовательно,

$$S = \frac{4}{3} xy = \frac{4}{3} m^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{3} m^2 \sin 2\alpha.$$

Отсюда

$$S \leq \frac{2}{3} m^2,$$

причем  $S = \frac{2}{3} m^2$  только при  $\alpha = 45^\circ$ .

**Решение 3.** Обозначим угол между медианами  $AD$  и  $BE$  равнобедренного треугольника  $ABC$  через  $\varphi$ . Так как  $AD = BE = m$  и площадь трапеции  $ABDE$  составляет  $\frac{3}{4}$  площади треугольника  $ABC$ , то

$$S = \frac{4}{3} S_{ABDE} = \frac{2}{3} m^2 \sin \varphi,$$

откуда

$$S \leq \frac{2}{3} m^2.$$

**Решение 4.** Пусть медианы треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Тогда  $AM = BM = \frac{2}{3} m$ , поэтому

$$S = 3S_{AMB} = \frac{2}{3} m^2 \sin \varphi,$$

где  $\varphi = \angle AMB$ . Отсюда следует, что  $S \leq \frac{2}{3} m^2$ , причем равенство достигается только при  $\varphi = 90^\circ$ .

**108. Решение 1.** Так как  $a = 2R \sin A$  и  $b = 2R \sin B$ , то равенство  $ab = 2R^2$  приводится к виду

$$2 \sin A \sin B = 1,$$

или

$$\cos(A - B) - \cos(A + B) = 1.$$

Но  $\cos(A + B) = -\cos C$ . Следовательно,

$$\cos C = 1 - \cos(A - B).$$

Откуда

$$\cos C \geq 0 \text{ и } \angle C \leq 90^\circ,$$

причем  $\angle C = 90^\circ$  лишь при  $a = b$ .

**Решение 2.** Воспользуемся неравенством  $\sin \frac{C}{2} \leq \frac{c}{2\sqrt{ab}}$ . Учитывая, что  $ab = 2R^2$  и  $c = 2R \sin C$ , получаем:

$$\sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sin C,$$

или

$$\sin \frac{C}{2} \left( \sqrt{2} \cos \frac{C}{2} - 1 \right) \geq 0,$$

откуда

$$\cos \frac{C}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } \angle C \leq 90^\circ.$$

**Решение 3.** Применим теорему косинусов. Выполнив замену  $ab$  на  $2R^2$ , получим

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a-b)^2 + 4R^2 - c^2}{2ab} \geq 0.$$

Следовательно,  $\angle C \leq 90^\circ$ .

Решение 4. Имеем:

$$ab = 2R^2.$$

Используя известное соотношение  $ab = 2Rh_c$ , получим

$$h_c = R.$$

Значит, дуга  $ACB$  не меньше полуокружности, поэтому  $\angle C \leq 90^\circ$ .

109. Решение 1. Воспользуемся тождеством

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Так как  $a^2 + b^2 = c^2$  и  $(a - b)^2 \geq 0$ , то

$$(a + b)^2 \leq 2c^2,$$

или

$$a + b \leq c\sqrt{2}.$$

Равенство имеет место только при  $a = b$ .

Решение 2. Имеем:

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad ab = ch_c, \quad h_c \leq \frac{c}{2}.$$

Следовательно,

$$(a + b)^2 = c^2 + 2ch_c \leq 2c^2,$$

или

$$a + b \leq c\sqrt{2}.$$

Решение 3. Поскольку  $a = c \sin A$  и  $b = c \cos A$ , то

$$a + b = c(\sin A + \cos A) = c\sqrt{2} \sin(45^\circ + \alpha) \leq c\sqrt{2}.$$

Решение 4. На продолжении катета  $AC$  за вершину  $C$  прямого угла отложим отрезок  $CD$ , равный  $BC$ . Тогда

$$AD = a + b, \quad \angle ADB = 45^\circ.$$

Расстояние  $AK$  от вершины  $A$  до прямой  $BD$  равно  $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ . Но  $AK \leq AB$ . Следовательно,

$$a + b \leq c\sqrt{2}.$$

110. Решение 1. Пусть  $\angle A = \alpha$ . Тогда  $a = c \sin \alpha$ ,  $b = c \cos \alpha$ . Учитывая это, получаем:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{ch}{a + b + c} = \frac{h}{\sin \alpha + \cos \alpha + 1} = \frac{h}{1 + \sqrt{2} \sin(45^\circ + \alpha)}.$$

Отсюда

$$r \geq \frac{h}{1 + \sqrt{2}}.$$

Решение 2. Имеем:

$$h = \frac{2S}{c} = \frac{2pr}{c} = \frac{(a + b + c)r}{c}.$$

Воспользуемся результатом задачи 109. Применяя неравенство  $a + b \leq c\sqrt{2}$ , получим:

$$h \leq (1 + \sqrt{2})r.$$

Решение 3. Обозначим через  $J$  центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник  $ABC$ . Пусть окружность касается катета  $BC$  в точке

$K$  и гипотенузы  $AB$  в точке  $L$ . Тогда  $CK = JK = r$ ,  $\angle CKJ = 90^\circ$  и  $CJ = r\sqrt{2}$ .

А так как

$$h \leq CJ + JL,$$

то

$$h \leq (1 + \sqrt{2})r.$$

При любом способе решения легко обосновать, что знак равенства имеет место только при  $a = b$ .

**111 Р е ш е н и е 1.** Из равенства задачи 101 (см. с. 43) на основании основного тождества тригонометрии вытекает равенство

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C.$$

Докажем, что

$$\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}.$$

По теореме косинусов

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{8a^2b^2c^2}.$$

Положим:  $c \leq b \leq a$ . Тогда имеем:

$$\begin{aligned} & (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = \\ & = (c^4 - (a^2 - b^2)^2)(a^2 + b^2 - c^2) = c^4(a^2 + b^2 - c^2) - (a^2 - b^2) \times \\ & \times (a^2 + b^2 - c^2) = a^2b^2c^2 - c^2(a^2 - c^2)(b^2 - c^2) - \\ & - (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) \leq a^2b^2c^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}, \quad \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

Знак равенства имеет место только тогда, когда  $a = b = c$ .

**Р е ш е н и е 2.** Пусть  $\angle A < 90^\circ$ . Тогда имеем:

$$\begin{aligned} 8 \cos A \cos B \cos C &= 4 \cos A (\cos(B + C) + \\ &+ \cos(B - C)) \leq 4 \cos A (1 - \cos A) = 1 - (2 \cos A - 1)^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Далее поступаем так же, как и при решении 1.

**Р е ш е н и е 3.** Воспользуемся векторным равенством

$$\overline{OM} = \frac{1}{3} (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}),$$

где  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .  $M$  — центроид треугольника.

Вычислим скалярный квадрат вектора  $\overline{OM}$ . Учитывая, что  $2\overline{OA} \cdot \overline{OB} = OA^2 + OB^2 - AB^2 = 2R^2 - c^2$ ,  $2\overline{OB} \cdot \overline{OC} = 2R^2 - a^2$ ,  $2\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 2R^2 - b^2$ , получаем:

$$\begin{aligned} OM^2 &= \frac{1}{9} (3R^2 + (2R^2 - a^2) + (2R^2 - b^2) + (2R^2 - c^2)) = \\ &= \frac{1}{9} (9R^2 - a^2 - b^2 - c^2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2.$$

Разделив это неравенство почленно на  $4R^2$ , получим:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}.$$

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда точки  $O$  и  $M$  совпадают, то есть, когда треугольник равносторонний.

112. 1) Р е ш е н и е 1. По теореме косинусов имеем:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Следовательно,

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} + 1$$

(см. решение 1 задачи 102).

$$\text{Но } \sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{(p-a) + (p-b)}{2} \quad \text{или} \quad \sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{c}{2}.$$

Аналогично

$$\sqrt{(p-a)(p-c)} \leq \frac{b}{2}, \quad \sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{a}{2}.$$

Поэтому

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \leq \frac{1}{8}.$$

Значит,

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Р е ш е н и е 2. Выполнив преобразования, получим:

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= \cos A + 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \leq \cos A + 2 \sin \frac{A}{2} = \\ &= 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} = \frac{3}{2} - \left( \sin \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Знак равенства имеет место только тогда, когда  $\angle B = \angle C$  и  $\angle A = 60^\circ$ , то есть, когда треугольник  $ABC$  — равносторонний.

Р е ш е н и е 3. Пусть  $ABC$  — данный треугольник. Отложим на лучах  $AC$  и  $BC$  отрезки  $AM$  и  $BN$ , равные  $AB$ . Очевидно, что

$$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{BN},$$

причем  $\overline{MN} = \bar{0}$  только тогда, когда точки  $C$ ,  $M$  и  $N$  совпадают, то есть когда треугольник  $ABC$  — равносторонний. Будем считать, что  $AB = 1$ . Учитывая, что  $\overline{MA} \cdot \overline{AB} = \cos(180^\circ - C) = -\cos C$ , получим:

$$\overline{MN}^2 = 3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C).$$

Так как  $\overline{MN}^2 \geq 0$ , то

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Р е ш е н и е 4. Пусть окружность, вписанная в треугольник  $ABC$  касается сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  соответственно в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Тогда  $\angle A_1JB_1 = 180^\circ - \angle C$ , где  $J$  — центр вписанной окружности.

Воспользуемся соотношением

$$(\overline{JA_1} + \overline{JB_1} + \overline{JC_1})^2 \geq 0.$$

Положим  $JA_1 = JB_1 = JC_1 = 1$ . Так как  $\overline{JA_1} \cdot \overline{JB_1} = -\cos C$ ,  $\overline{JA_1} \times \overline{JC_1} = -\cos B$ ,  $\overline{JB_1} \cdot \overline{JC_1} = -\cos A$ ,

то после возведения левой части неравенства в квадрат, получим:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

112. 2) Р е ш е н и е 1. Имеем:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = (b-c)^2 + 4bc \sin^2 \frac{A}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$a \leq 2\sqrt{bc} \sin \frac{A}{2}.$$

Используя это неравенство, получаем:

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{ac}} \cdot \frac{c}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{8}.$$

Равенство имеет место только при  $a = b = c$ .

Р е ш е н и е 2. В силу формулы  $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$  имеем

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}.$$

По теореме о среднем арифметическом

$$\begin{aligned} \sqrt{(p-a)(p-b)} &\leq \frac{2p-a-b}{2} = \frac{c}{2}, \\ \sqrt{(p-a)(p-c)} &\leq \frac{b}{2}, \quad \sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Перемножив эти неравенства почленно, получим:

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{1}{8} abc.$$

Следовательно,

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Р е ш е н и е 3. При решении задачи 111 первым и вторым способами получено неравенство:

$$\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}.$$

Применим его к треугольнику с углами  $90^\circ - \frac{A}{2}$ ,  $90^\circ - \frac{B}{2}$ ,  $90^\circ - \frac{C}{2}$ .  
Получим:

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Р е ш е н и е 4. Доказываемое неравенство вытекает из тождества

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

и неравенства (см. с. 35).

113. 1) Р е ш е н и е 1. Для углов любого треугольника  $ABC$  имеет место соотношение

$$\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C = 1$$

(см. решение 3 задачи 104).

Пользуясь неравенством  $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + ac + bc)$ , получим:  
 $(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C)^2 \geq 3$ .

Покажем, что  $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C > 0$ . Действительно, если  $\operatorname{ctg} C < 0$ , то  $\operatorname{ctg} A > 0$  и

$$\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} > 0.$$

Значит, полученное неравенство равносильно неравенству

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \geq \sqrt{3}.$$

**Решение 2.** Имеем:

$$\begin{aligned} & (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B) + (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C) + (\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C) = \\ &= \frac{\sin C}{\sin A \sin B} + \frac{\sin B}{\sin A \sin C} + \frac{\sin A}{\sin B \sin C} = \\ &= \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\sin A \sin B \sin C} \geq \\ &\geq \frac{\sin A \sin B + \sin A \sin C + \sin B \sin C}{\sin A \sin B \sin C} = \\ &= \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right).$$

Остается воспользоваться доказанным неравенством

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{3}$$

(см. пример 4, с. 35).

Очевидно, равенство достигается только в случае равностороннего треугольника  $ABC$ .

**Решение 3.** Используя следствие из теоремы косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S \operatorname{ctg} A$$

и формулу  $2S = bc \sin A$ , получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} \geq \frac{ab + ac + bc}{4S} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right) \geq \sqrt{3}. \end{aligned}$$

**113. 2) Решение 1.** Используя тождество задачи 104 (см. с. 43), получаем:

$$\left( \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)^2 \geq 3 \left( \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right) = 3,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}.$$

**Решение 2.** Применив неравенство

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \geq \sqrt{3}$$

к треугольнику с углами  $90^\circ - \frac{A}{2}$ ,  $90^\circ - \frac{B}{2}$ ,  $90^\circ - \frac{C}{2}$ , получим доказываемое неравенство.

113. 3) Р е ш е н и е 1. В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим трех положительных чисел имеем:

$$\left( \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right)^3 \geq 27 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

Но

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} > 0 \quad (\text{см. задачу 104, с. 43}).$$

Следовательно,

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \geq 3 \sqrt{3}.$$

Р е ш е н и е 2. Имеем:

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{\sin A} = \frac{1}{\sin A} + \operatorname{ctg} A.$$

Аналогичные выражения можно записать для  $\operatorname{ctg} \frac{B}{2}$  и  $\operatorname{ctg} \frac{C}{2}$ .

Следовательно,

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} + \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right),$$

получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C &\geq \frac{1}{3} \left( \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right), \\ \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} &\geq \frac{3}{2} \left( \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right). \end{aligned}$$

Точно так же можно вывести соотношение

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} - \\ &- (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$ , полученные неравенства за-

пишем в виде цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C &\geq \frac{1}{3} \left( \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right) \geq \\ &\geq \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что знак равенства везде имеет место тогда и только тогда, когда  $\angle A = \angle B = \angle C$ , то есть когда треугольник  $ABC$  равносторонний.



Таким образом, задача решена с помощью лишь одного неравенства  $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \geq \sqrt{3}$  и тригонометрических тождеств. Попутно получено несколько новых неравенств.

Заметим, что для углов остроугольного треугольника имеет место неравенство

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \geq 3(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C),$$

которое можно получить, применив неравенство

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \geq 3 \left( \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)$$

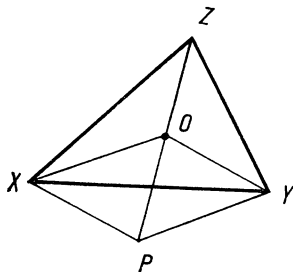


Рис. 29

к треугольнику с углами  $180^\circ - 2A$ ,  $180^\circ - 2B$ ,  $180^\circ - 2C$ , где  $\angle A < 90^\circ$ ,  $\angle B < 90^\circ$ ,  $\angle C < 90^\circ$ .

**114. Решение 1.** Пусть  $ABC$  — данный треугольник. На лучах  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  построим точки  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  такие, что  $BX = x$ ,  $CY = y$ ,  $AZ = z$ . Воспользуемся неравенством

$$(\overline{BX} + \overline{CY} + \overline{AZ})^2 \geq 0.$$

Поскольку  $\angle(\overline{BX}, \overline{CY}) = 180^\circ - \angle C$  и точно так же для углов между векторами  $\overline{BX}$  и  $\overline{AZ}$ ,  $\overline{CY}$  и  $\overline{AZ}$ , то после возведения в квадрат левой части неравенства получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz \cos A - 2zx \cos B - 2xy \cos C \geq 0.$$

Выясним, при каком условии это неравенство обращается в равенство.

Складывая векторы  $\overline{BX}$ ,  $\overline{CY}$ ,  $\overline{AZ}$  по правилу многоугольника, получим ломаную, которая будет замкнутой тогда и только тогда, когда  $\overline{BX} + \overline{CY} + \overline{AZ} = \vec{0}$ . При этом получится треугольник, углы которого равны углам треугольника  $ABC$ , то есть треугольник, подобный треугольнику  $ABC$ .

Итак, равенство имеет место тогда и только тогда, когда  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — длины сторон треугольника с углами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , то есть при условии, что выполняется равенство

$$\frac{x}{\sin A} = \frac{y}{\sin B} = \frac{z}{\sin C}.$$

**Решение 2.** Отложим от некоторой точки  $O$  векторы  $\overline{OX}$ ,  $\overline{OY}$ ,  $\overline{OZ}$  такие, что  $OX = x$ ,  $OY = y$ ,  $OZ = z$ ,  $\angle YOZ = 180^\circ - \angle A$ ,  $\angle ZOX = 180^\circ - \angle B$ , тогда  $\angle XOY = 180^\circ - \angle C$ . Имеем:

$$(\overline{OX} + \overline{OY} + \overline{OZ})^2 \geq 0.$$

После возведения суммы векторов в квадрат получим неравенство

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz \cos A - 2zx \cos B - 2xy \cos C \geq 0.$$

Равенство  $(\overline{OX} + \overline{OY} + \overline{OZ})^2 = 0$  имеет место тогда и только тогда, когда точка  $O$  совпадает с центроидом треугольника  $XYZ$ . Действительно, если  $O$  — центроид, то построив точку  $P$  такую, что  $\overline{OP} = -\overline{OZ}$ , получим параллелограмм  $OXPY$  (рис. 29). Следовательно,

$$\overline{OX} + \overline{OY} + \overline{OZ} = \overline{OP} + \overline{OZ} = \vec{0}.$$

Обратно, если  $\overline{OX} + \overline{OY} + \overline{OZ} = \vec{0}$ , то  $\overline{OX} + \overline{OY} = -\overline{OZ}$ , или  $\overline{OP} = -\overline{OZ}$ , откуда легко вывести, что точка  $O$  — центроид треугольника  $XYZ$ .

Другими словами, доказываемое неравенство обращается в равенство только тогда, когда  $PY = x$ ,  $OY = y$ ,  $OP = z$ ,  $\angle POY = 180^\circ - \angle YOZ = \angle A$ ,  $\angle OPY = \angle B$ , то есть при условии, что

$$\frac{x}{\sin A} = \frac{y}{\sin B} = \frac{z}{\sin C}.$$

**Решение 3.** Легко проверить, что если  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , то имеет место тождество

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2yz \cos \alpha - 2zx \cos \beta - 2xy \cos \gamma = \\ = (x \cos \beta + y \cos \alpha - z)^2 + (x \sin \beta - y \sin \alpha)^2, \end{aligned}$$

из которого и вытекает доказываемое неравенство.

Равенство  $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz \cos \alpha - 2zx \cos \beta - 2xy \cos \alpha = 0$  имеет место тогда и только тогда, когда  $\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{y}{\sin \beta}$  и  $z = x \cos \beta + y \cos \alpha$ , то есть когда  $x, y, z$  — длины сторон треугольника с углами  $\alpha, \beta, \gamma$ .

**115. Решение 1.** Имеем:

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}.$$

Но  $\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{(p-b) + (p-c)}{2} = \frac{a}{2}$ . Следовательно,

$$h_a \leq p \sqrt{p-a},$$

причем равенство имеет место только при  $b = c$ .

**Решение 2.** Воспользуемся формулами:

$$\begin{aligned} p = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}, \quad p-a = 4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}, \\ h_0 = 2R \sin B \sin C. \end{aligned}$$

Выполнив несложные преобразования, получим:

$$\frac{h_a^2}{p(p-a)} = \frac{\sin B \sin C}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{\cos(B-C) - \cos(B+C)}{1 + \cos A} \leq 1.$$

Отсюда

$$h_a \leq \sqrt{p(p-a)}.$$

**Решение 3.** Применим формулу

$$l_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}.$$

Поскольку  $\sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}$ , то

$$l_a \leq \sqrt{p(p-a)}$$

(равенство достигается только при  $b = c$ ).

Так как  $h_a \leq l_a$ , то полученное неравенство является усилением неравенства  $h_a \leq \sqrt{p(p-a)}$ .

**116. Решение 1.** Так как  $h_a = b \sin C = c \sin B$ , то

$$h_a^2 = bcsin B \sin C.$$

Но

$$2 \sin B \sin C = \cos(B-C) - \cos(B+C) \leq 1 + \cos A,$$

или

$$\sin B \sin C \leq \cos^2 \frac{A}{2}.$$

Следовательно,

$$h_a \leq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2},$$

причем равенство достигается только тогда, когда  $\angle B = \angle C$ .

**Решение 2.** Выразив двумя способами площадь треугольника  $ABC$ , получим

$$ah_a = bc \sin A,$$

откуда

$$h_a = \frac{2bc}{a} \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}.$$

А так как

$$\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$$

(см. решение 1 задачи 112, 2), с. 101), то

$$h_a \leq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}.$$

**Решение 3.** Имеем:

$$h_a \leq \sqrt{p(p-a)} \quad (\text{см. задачу 115, с. 45}).$$

А так как

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

то

$$h_a \leq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}.$$

**Решение 4.** Воспользуемся формулой:

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}.$$

Поскольку  $\sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}$ , то

$$l_a \leq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}.$$

Остается заметить, что  $h_a \leq l_a$ .

Равенство  $h_a = \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}$  имеет место только при  $b = c$ .

**117. Решение 1.** Воспользуемся равенством:

$$a^2 = (b-c)^2 + 4S \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Заменив  $2S = ah_a$ , получим

$$a^2 = (b-c)^2 + 2ah_a \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Откуда

$$a \geq 2h_a \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

где равенство имеет место лишь при  $b = c$ .

Р е ш е н и е 2. Имеем:

$$a = 2R \sin A, \quad h_a = b \sin C = 2R \sin B \sin C.$$

Следовательно,

$$\frac{a}{2h_a} = \frac{\sin A}{2 \sin B \sin C} = \frac{\sin A}{\cos(B-C) - \cos(B+C)} \geq \frac{\sin A}{1 - \cos A} = \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Откуда

$$a \geq 2h_a \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

причем  $a = 2h_a \operatorname{tg} \frac{A}{2}$  только тогда, когда  $\angle B = \angle C$ , то есть когда треугольник  $ABC$  равнобедренный.

Р е ш е н и е 3. Опишем около треугольника  $ABC$  окружность. Высота  $AH$  треугольника не превышает высоты  $MN$  сегмента, то есть  $h_a \leq MN$ .

А так как  $MN = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ , то

$$2h_a \leq a \operatorname{ctg} \frac{A}{2}, \quad \text{или} \quad a \geq 2h_a \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Р е ш е н и е 4. Проведем биссектрису  $AD$  треугольника  $ABC$ . Обозначим  $AD = l_a$ ,  $BD = m$ ,  $CD = n$ . Докажем, что  $a \geq 2l_a \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ .

По теореме синусов имеем:

$$\frac{m}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{l_a}{\sin B}, \quad \frac{n}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{l_a}{\sin C}.$$

Отсюда

$$a = m + n = l_a \sin \frac{A}{2} \left( \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right).$$

Для любых положительных чисел  $x$  и  $y$  имеет место неравенство

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}.$$

Применив его, получим:

$$\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq \frac{4}{\sin B + \sin C} = \frac{2}{\sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} \geq \frac{2}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Следовательно,

$$a \geq 2l_a \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = 2l_a \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Р е ш е н и е 5. Неравенство  $a \geq 2l_a \operatorname{tg} \frac{A}{2}$  представляет собой усиление доказываемого неравенства. Приведем геометрический вывод.

Продолжим биссектрису  $AD$  треугольника  $ABC$  до пересечения с описанной окружностью в точке  $E$ . Проведем диаметр  $EM$  и обозначим через  $N$  точку пересечения его со стороной  $BC$ . Так как  $E$  — середина дуги  $BC$ , то  $ME \perp BC$ ,  $BN = NC = \frac{a}{2}$  и  $MN = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ .

Заметим, что  $AE \leq ME$  и  $DE \geq NE$ , поэтому

$$AD = AE - DE \leq ME - NE = MN.$$

Итак,  $AD \leq MN$ , то есть  $l_a \leq \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$  или  $a \geq 2l_a \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ , причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда точки  $A$  и  $M$  совпадают, то есть когда  $b = c$ .

118. Решение 1. Воспользуйтесь формулами  $r = \frac{S}{p}$  и  $R = \frac{abc}{4S}$ .

Затем примените неравенство  $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{1}{8} abc$  (см. решение 1 задачи 112, с. 101).

Решение 2. Воспользуйтесь формулой

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

и неравенством

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Решение 3. Примените формулу Эйлера:  $d^2 = R^2 - 2Rr$ , выражающую расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника (см. задачу 99, с. 43).

Установите, что равенство  $R = 2r$  имеет место лишь тогда, когда центры окружностей совпадают, то есть когда треугольник равносторонний.

119. Решение 1. По формуле Герона имеем:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Используя свойство среднего арифметического трех положительных чисел, получим:

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left( \frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \right)^3 = \frac{p^3}{27}.$$

Следовательно,

$$S \leq \sqrt[3]{\frac{p^4}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}},$$

причем равенство имеет место только при  $a = b = c$ .

Решение 2. Воспользуемся тождествами

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}, \quad p = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

и неравенством

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}},$$

где равенство имеет место только тогда, когда треугольник равносторонний.

Учитывая, что  $S = pr$ , получим:

$$\frac{S}{p^2} = \frac{r}{p} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Решение 3. Сначала докажем неравенство

$$h_a + h_b + h_c \geq 9r.$$

Так как для любых положительных чисел имеет место неравенство

$$(a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9,$$

где равенство достигается только при  $a = b = c$ , то

$$h_a + h_b + h_c = 2S \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 2pr \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9r.$$

Далее применим неравенство задачи 115 (см. с. 45) и получим:

$$9r \leq h_a + h_b + h_c \leq \sqrt{p} (\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}).$$

Но

$$\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3((p-a) + (p-b) + (p-c))} = \sqrt{3p}.$$

Следовательно,

$$9r \leq p\sqrt{3}$$

(равенство имеет место только при  $a = b = c$ ). Умножив обе части этого неравенства на  $\frac{p}{9}$ , получим:

$$S \leq \frac{p^2 \sqrt{3}}{9}.$$

**Решение 4.** Используя формулу  $S = \frac{1}{2} ab \sin C$  и неравенство

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{3}$$

(см. пример 4, с. 35), получаем:

$$\begin{aligned} 4p^2 &= (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) = \\ &= 6S \cdot \left( \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right) \geq 6S \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}S, \end{aligned}$$

или

$$p^2 \geq 3\sqrt{3}S,$$

где равенство достигается только при  $a = b = c$ .

Полученное неравенство дает решение знаменитой изопериметрической задачи для треугольника. Доказано, что из всех треугольников данного периметра наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник. Действительно, мы установили, что  $S < \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ , если треугольник  $ABC$  не является

равносторонним. Если же  $a = b = c$ , то  $S = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ .

Одновременно доказано, что **из всех треугольников данной площади наименьший периметр имеет равносторонний треугольник.**

**120. Решение 1.** Для любых положительных чисел  $a, b, c$  имеет место неравенство

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Используя его, из неравенства, полученного в задаче 119 (см. с. 108) выводим, что

$$4\sqrt{3}S \leq \frac{4p^2}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Равенство имеет место лишь при  $a = b = c$ .

Решение 2. Воспользуемся равенством

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S},$$

вытекающим из теоремы косинусов и формулы  $2S = bc \sin A$ .

Имеем:

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

Теперь применим неравенство

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \geq \sqrt{3} \quad (\text{см. задачу 113, с. 45}).$$

Решение 3. Выразим  $a, b, c$  и  $S$  через  $R$  и синусы углов треугольника. Применив затем неравенство  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ , получим:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2S} = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\sin A \sin B \sin C} \geq \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}.$$

А так как  $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{3}$ , то

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Решение 4. Пусть  $ABC$  — данный треугольник и  $ABC_1$  — равносторонний треугольник, построенный так, что точки  $C$  и  $C_1$  лежат по одну сторону от прямой  $AB$ . По теореме косинусов из треугольника  $ACC_1$  находим:

$$CC_1^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(60^\circ - A) = b^2 + c^2 - 2bc \left( \frac{1}{2} \cos A + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A \right).$$

Но

$$bc \cos A = \frac{1}{2} (b^2 + c^2 - a^2) \text{ и } bc \sin A = 2S.$$

Следовательно,

$$CC_1^2 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2) - 2\sqrt{3}S.$$

Поскольку  $CC_1^2 \geq 0$ , то

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Равенство имеет место только тогда, когда  $C = C_1$ , то есть когда треугольник  $ABC$  является равносторонним.

Решение 5. Для всякого треугольника  $ABC$  справедливо равенство

$$a^2 = (b - c)^2 + 4S \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - (a - b)^2 - (b - c)^2 - (c - a)^2 &= \\ &= 4S \left( \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right). \end{aligned}$$

Применив неравенство  $\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$ , получим:

$$a^2 + b^2 + c^2 - (a - b)^2 - (b - c)^2 - (c - a)^2 \geq 4\sqrt{3}S,$$

где равенство имеет место лишь тогда, когда треугольник  $ABC$  равносторонний. Заметим, что получено неравенство, усиливающее доказываемое.

Р е ш е н и е 6. Для любых положительных чисел  $a, b, c$  имеет место неравенство

$$a + b + c \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)}.$$

Положив  $a = yz$ ,  $b = zx$  и  $c = xy$ , получим:

$$xy + yz + zx \geq \sqrt{3xyz(x + y + z)}.$$

Так как  $p - a > 0$ ,  $p - b > 0$ ,  $p - c > 0$  и  $(p - a) + (p - b) + (p - c) = p$ , то на основании приведенного неравенства имеем:

$$4\sqrt{3}S = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)[(p-a) + (p-b) + (p-c)]} \leq \leq 4((p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a)).$$

После преобразований получим:

$$2(ab + bc + ca) - a^2 - b^2 - c^2 \geq 4\sqrt{3}S,$$

или

$$a^2 + b^2 + c^2 - (a - b)^2 - (b - c)^2 - (c - a)^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Равенство здесь имеет место лишь тогда, когда треугольник  $ABC$  равно-  
сторонний. Таким образом, мы получили то же самое неравенство, что и при  
решении 5.

Р е ш е н и е 7. Докажем, что для любого треугольника выполняется  
неравенство

$$ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}S,$$

из которого в силу неравенства  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$  также вытекает  
доказываемое неравенство.

Согласно формуле  $S = \frac{1}{2}ab \sin C$  имеем:

$$ab + bc + ca = 2S \left( \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right).$$

Применив неравенство

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin C} + \frac{1}{\sin B} \geq 2\sqrt{3},$$

получим:

$$ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}S,$$

где равенство достигается лишь при  $a = b = c$ .

121. Р е ш е н и е 1. Пусть заданы сторона  $AB$  и угол  $C$  треугольника  
 $ABC$ . Пользуясь формулой  $a = 2R \sin A$ , докажите, что

$$a + b = 4R \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A - B}{2} \leq \frac{C}{\sin \frac{C}{2}},$$

причем равенство достигается лишь в том случае, когда  $\angle A = \angle B$ . Отсюда  
выведите, что треугольник  $ABC$  имеет наибольший периметр тогда, когда  
 $AC = BC$ .

Р е ш е н и е 2. Докажите, что из всех треугольников, имеющих дан-  
ное основание  $AB$  и данный угол  $C$ , наибольшую площадь имеет равно-  
бедренный треугольник. Затем примените формулу

$$(a + b)^2 = c^2 + 4S \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$



**Решение 3.** Отложите на продолжении стороны  $AC$  за вершину  $C$  отрезок  $CD$ , равный стороне  $BC$ . Тогда  $AD = a + b$  и  $\angle ADB = \frac{1}{2} \angle C$ . Докажите, что точка  $D$  принадлежит дуге окружности с концами  $A$  и  $B$ , поэтому хорда  $AD$  не больше диаметра этой окружности.

**122. Решение 1.** Пусть  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Тогда имеем:

$$OA + OB \geq AB$$

или

$$2R \geq c,$$

причем  $2R = c$  только тогда, когда  $\angle C = 90^\circ$ .

Если  $h \leq \frac{c}{2}$ , то по данным  $AB = c$  и  $CH = h$  можно построить прямоугольный треугольник  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ), который и будет удовлетворять условию задачи. При этом  $R = \frac{c}{2}$  является наименьшим значением  $R$ .

Если же  $h > \frac{c}{2}$ , то прямая, параллельная стороне  $AB$  и отстоящая от нее на  $h$ , не пересекает окружность с диаметром  $AB$ . Следовательно, вершина  $C$  треугольника  $ABC$  будет лежать вне этой окружности, и  $\angle C < 90^\circ$ . В таком случае из формулы  $2R = \frac{c}{\sin C}$  следует, что  $R$  имеет наименьшее значение тогда, когда величина угла  $C$  наибольшая.

Применив неравенство  $\operatorname{tg} \frac{C}{2} \leq \frac{c}{2h}$ , где равенство достигается только при  $a = b$  (см. задачу 117, с. 45), приходим к выводу, что искомым треугольник равнобедренный. По теореме Пифагора находим:

$$R_{\min} = \frac{c^2 + 4h^2}{8h}.$$

Итак, искомым треугольник является прямоугольным или равнобедренным в зависимости от того, будет ли  $h \leq \frac{c}{2}$  или  $h > \frac{c}{2}$ .

При этом

$$R_{\min} = \begin{cases} \frac{c}{2}, & \text{если } h \leq \frac{c}{2}; \\ \frac{c^2 + 4h^2}{8h}, & \text{если } h > \frac{c}{2}. \end{cases}$$

**Решение 2.** Пусть  $M$  — середина отрезка  $AB$ . Обозначим  $MH$  через  $x$ . Тогда

$$ab = \sqrt{\left(h^2 + \left(\frac{c}{2} + x\right)^2\right)\left(h^2 + \left(\frac{c}{2} - x\right)^2\right)}.$$

По формуле  $R = \frac{ab}{2h}$  находим, что

$$R = \frac{\sqrt{c^2 h^2 + \left(x^2 + h^2 - \frac{c^2}{4}\right)^2}}{2h}.$$

Отсюда следует, что если  $h \leq \frac{c}{2}$ , то при  $x = \sqrt{\frac{c^2}{4} - h^2}$  радиус  $R$  имеет наименьшее возможное значение, равное  $\frac{c}{2}$ . Если же  $h > \frac{c}{2}$ , то радиус  $R$  имеет наименьшее значение при  $x = 0$ , причем  $R_{\min} = \frac{c^2 + 4h^2}{8h}$ .

**Решение 3.** Введем на плоскости прямоугольную систему координат: ось абсцисс проведем через точки  $A$  и  $B$ , а ось ординат — через середину отрезка  $AB$ . Тогда можно положить:  $A\left(-\frac{c}{2}; 0\right)$ ,  $B\left(\frac{c}{2}; 0\right)$ ,  $C(x; h)$ . Центр  $D$  окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , принадлежит оси ординат. Полагая  $D(0; d)$  и учитывая, что  $AD = CD$  получаем:

$$\frac{c^2}{4} + d^2 = x^2 + (d - h)^2,$$

откуда

$$d = \frac{x^2 + h^2 - \frac{c^2}{4}}{2h}.$$

Таким образом, радиус  $R$  описанной окружности определяется как функция от  $x$ :

$$R^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{\left(x^2 + h^2 - \frac{c^2}{4}\right)^2}{4h^2}.$$

Далее поступаем так же, как и при решении 2.

**123. Решение 1.** Воспользуемся формулой

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b) + (p-c)(p-d)},$$

выражающей площадь четырехугольника, вписанного в окружность, через длины его сторон. На основании свойства среднего арифметического двух положительных чисел имеем:

$$\begin{aligned} S &\leq \frac{(p-a) + (p-b)}{2} \cdot \frac{(p-c) + (p-d)}{2} = \frac{(a+b)(c+d)}{4} \leq \\ &\leq \frac{(a+b+c+d)^2}{16} = \frac{p^2}{4}, \end{aligned}$$

причем  $S = \frac{p^2}{4}$  лишь при условии, что  $a = b = c = d$ , то есть когда четырехугольник является квадратом.

**Решение 2.** Применим формулу

$$S = \frac{1}{2} lf \sin \alpha,$$

где  $l$  и  $f$  — длины диагоналей четырехугольника и  $\alpha$  — величина угла между диагоналями.

Для четырехугольника, вписанного в окружность радиуса  $R$ , имеем:

$$l < 2R, f < 2R \text{ и } \sin \alpha \leq 1.$$

Следовательно,

$$S \leq 2R^2,$$

причем равенство имеет место только тогда, когда  $l = f = 2R$  и  $\alpha = 90^\circ$ , то есть четырехугольник наибольшей площади является квадратом.

**Решение 3.** Соединим центр окружности с вершинами четырехугольника и рассмотрим четыре образовавшихся при этом равнобедренных треугольника. Каждый из них имеет наибольшую площадь, когда угол при вершине — прямой. Значит, сумма их площадей будет наибольшей, когда четырехугольник — квадрат.

124. Решение 1. Пусть в полукруг радиуса  $R$  с центром  $O$  вписан прямоугольник  $ABCD$  (сторона  $AB$  лежит на диаметре полукруга). Обозначив  $BC$  через  $x$ , выразите площадь прямоугольника как функцию  $x$ :

$$S = 2\sqrt{x^2(R^2 - x^2)}, \quad 0 < x < R.$$

Докажите, что  $S_{\max} = R^2$  при  $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ , а отношение сторон искомого прямоугольника равно 2 : 1.

Решение 2. Обозначив  $\angle BOC = \alpha$ , установите, что

$$S = R^2 \sin 2\alpha,$$

где  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

Решение 3. Применив осевую симметрию относительно диаметра полуокружности, сведите задачу к нахождению вписанного в окружность прямоугольника наибольшей площади.

125. Решение 1. Очевидно, достаточно рассмотреть выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Обозначив  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ ,  $\angle C = \gamma$ ,  $\angle D = \delta$ , находим:

$$2S = ab \sin \beta + cd \sin \delta \leq ab + cd.$$

Аналогично

$$2S \leq ad + bc.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 4S &\leq (ab + cd) + (ad + bc) = (a + c)(b + d) \leq \\ &\leq \frac{(a + b + c + d)^2}{4} = p^2, \quad S \leq \frac{p^2}{4}. \end{aligned}$$

Равенство  $S = \frac{p^2}{4}$  имеет место лишь тогда, когда углы четырехугольника прямые и  $a + c = b + d$ , то есть только для квадрата.

Решение 2. Площадь четырехугольника  $ABCD$  может быть вычислена по формуле

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cos^2 \frac{A + C}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$S \leq \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)},$$

где равенство имеет место при  $\alpha + \gamma = 180^\circ$ , то есть тогда, когда четырехугольник может быть вписан в окружность. Согласно задаче 123 получим:

$$S \leq \frac{p^2}{4},$$

где равенство достигается только тогда, когда четырехугольник — квадрат.

Решение 3. Из задачи 29 (см. с. 59) легко выводится формула для вычисления площади четырехугольника:

$$S = kl \sin \varphi,$$

где  $k$  и  $l$  — длины средних линий четырехугольника,  $\varphi$  — величина угла между ними.

Использував результат задачи 106 (см. с. 96), получим:

$$S \leq kl \leq \frac{(k + l)^2}{4} \leq \frac{(a + b + c + d)^2}{16} = \frac{p^2}{4}.$$

Равенство  $S = \frac{p^2}{4}$  имеет место лишь тогда, когда  $\varphi = 90^\circ$ ,  $k = l$  и средние линии параллельны сторонам четырехугольника. Следовательно, противо-

положные стороны четырехугольника параллельны, диагонали равны и перпендикулярны, то есть четырехугольник является квадратом.

126. Р е ш е н и е 1. Обозначим  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $CM = x$ ,  $CN = y$  (рис. 30). Из подобия треугольников  $APM$  и  $ABC$  имеем:

$$\frac{y}{a} = \frac{b-x}{b}.$$

По теореме косинусов выразим длину отрезка  $MN$  как функцию  $x$ :

$$MN^2 = x^2 + \frac{a^2(b-x)^2}{b^2} - \frac{2ax(b-x)\cos C}{b}.$$

Таким образом, задача сводится к исследованию квадратного трехчлена

$$b^2 MN^2 = m^2 x^2 - 2ab(a+b\cos C)x + a^2 b^2,$$

где  $m^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos C$ , то есть  $m$  — длина диагонали параллелограмма  $ABCD$ .

Р е ш е н и е 2. Построим треугольник  $ABC$  до параллелограмма  $ABCD$  и обозначим точку пересечения отрезков  $MN$  и  $CD$  через  $K$  (рис. 30). Пусть  $CM = x$ ,  $CN = y$ ,  $\angle CKM = \varphi$ ,  $\angle ACD = \alpha$  и  $\angle BCD = \beta$ . По теореме синусов находим:

$$MK = \frac{x \sin \alpha}{\sin \varphi}, \quad KN = \frac{y \sin \beta}{\sin \varphi}.$$

Следовательно,

$$MN = \frac{1}{\sin \varphi} (x \sin \alpha + y \sin \beta).$$

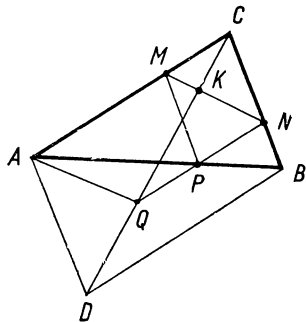


Рис. 30

Учитывая, что  $y = \frac{a(b-x)}{b}$  и  $b \sin \alpha = a \sin \beta$  выражение для  $MN$  приведем к виду:

$$MN = \frac{a \sin \beta}{\sin \varphi}, \text{ или } MN = \frac{b \sin \alpha}{\sin \varphi},$$

где  $\varphi > \beta$  и  $180^\circ - \varphi > \alpha$ .

Отсюда следует, что если  $\alpha < 90^\circ$  и  $\beta < 90^\circ$ , то длина отрезка  $MN$  имеет наименьшее значение при  $\varphi = 90^\circ$ , то есть когда  $MN \perp CD$ . Точку  $P$  можно построить, пользуясь методом подобия.

Если же  $\beta \geq 90^\circ$ , то длина отрезка  $MN$  будет наименьшей, когда точка  $P$  совпадает с точкой  $B$ .

Р е ш е н и е 3. Положим  $\overline{AP} = x\overline{AB}$ , где  $0 \leq x \leq 1$ , и выразим вектор  $\overline{MN}$  через  $\overline{CA}$  и  $\overline{CB}$  (рис. 30).

Так как  $PN \parallel AC$  и  $PM \parallel BC$ , то

$$\frac{CN}{CB} = \frac{AP}{AB} = x, \quad \frac{CM}{CA} = \frac{BP}{BA} = 1 - x.$$

Следовательно,  $\overline{CN} = x\overline{CB}$ ,  $\overline{CM} = (1-x)\overline{CA}$ , поэтому

$$\overline{MN} = \overline{CN} - \overline{CM} = x\overline{CB} - (1-x)\overline{CA} = \overline{AC} + x(\overline{CA} + \overline{CB}),$$

то есть  $\overline{MN} = \overline{AC} + x\overline{CD}$ , где  $\overline{CD}$  — диагональ параллелограмма  $ACBD$ .

Пусть  $x\overline{CD} = \overline{CQ}$ , тогда

$$\overline{MN} = \overline{AC} + \overline{CQ}, \text{ или } \overline{MN} = \overline{AQ}.$$

Полученное векторное соотношение подсказывает чисто геометрическое завершение задачи. Когда точка  $P$  пробегает отрезок  $AB$ , то  $x$  меняется от 0 до 1, а точка  $Q$  пробегает отрезок  $CD$ . Следовательно, длина  $MN$  будет наименьшей, когда  $Q$  — ближайшая к  $A$  точка отрезка  $CD$ .

Заметив, что  $AMNQ$  — параллелограмм и точка  $P$  лежит на прямой  $NQ$ , приходим к следующему построению точки  $P$ . Построим данный треугольник до параллелограмма  $ACBD$ ; найдем на его диагонали  $CD$  точку  $Q$ , ближайшую к  $A$ , и проведем через нее прямую, параллельную стороне  $AC$ . Точка пересечения этой прямой со стороной  $AB$  и есть искомого точка  $P$ . Если оба угла  $ACD$  и  $ADC$  острые, то  $Q$  — проекция точки  $A$  на  $CD$ ; если  $ACD$  — не острый угол, то  $Q = C$ , а  $P = A$ ; если же  $ADC$  — не острый угол, то  $Q = D$ , а  $P = B$ .

**Решение 4.** Прямое доказательство можно получить, если воспользоваться результатом задачи 18 (см. с. 45).

**127. Решение 1.** Так как четырехугольник  $ABCD$  описан около окружности радиуса  $r$ , то

$$S = pr \text{ и } AB + CD = BC + AD = p.$$

Согласно задаче 125 (см. с. 114) имеем:

$$4S \leq p^2, \text{ или } 4r \leq p,$$

то есть  $AB + CD \geq 4r$ .

Равенство  $AB + CD = 4r$  выполняется только тогда, когда  $ABCD$  квадрат.

**Решение 2.** Пусть  $O$  — центр вписанной окружности. Обозначим  $\angle BAO = \angle DAO = \alpha$ ,  $\angle ABO = \angle CBO = \beta$ ,  $\angle AOB = \varphi$ , а углы  $C$  и  $D$  треугольника  $COD$  обозначим через  $2\gamma$  и  $2\delta$ .

Из треугольника  $AOB$  находим:

$$AB = r (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = \frac{r \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

А так как  $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \leq 1 - \cos(\alpha + \beta)$ , то

$$AB \geq \frac{r \sin(\alpha + \beta)}{1 - \cos(\alpha + \beta)} = \frac{r \sin \varphi}{1 + \cos \varphi}.$$

Учитывая, что  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$ , то есть  $\gamma + \delta = \varphi$ . Аналогично получаем

$$CD \geq \frac{r \sin(\gamma + \delta)}{1 - \cos(\gamma + \delta)} = \frac{r \sin \varphi}{1 - \cos \varphi}.$$

Следовательно,

$$AB + CD \geq 2r \sin \varphi \left( \frac{1}{1 + \cos \varphi} + \frac{1}{1 - \cos \varphi} \right) = \frac{4r}{\sin \varphi} \geq 4r.$$

**Решение 3.** Пусть  $\angle AOB = \varphi$ , тогда  $\angle COD = 180^\circ - \varphi$ . Применив к треугольникам  $AOB$  и  $COD$  неравенство задачи 117 (см. с. 45), получим:

$$AB \geq 2r \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad CD \geq 2r \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Следовательно,

$$AB + CD \geq 2r \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) \geq 4r \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}} = 4r.$$

**128. Решение 1.** Обозначим основания перпендикуляров, проведенных из точки  $O$  к сторонам  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника, через  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  (рис. 31). Проекции точек  $A_1$  и  $B_1$  на прямую  $AB$  обозначим через  $A_2$  и  $B_2$ . Заметим, что  $\angle OA_1A_2 = \angle B$ ,  $\angle OB_1B_2 = \angle A$ , поэтому

$$A_2B_2 = A_2C_1 + C_1B_2 = r_1 \sin B + r_2 \sin A.$$

Около четырехугольника  $CA_1OB_1$  можно описать окружность, диаметр которой равен  $R_3$ . Следовательно,

$$A_1B_1 = R_3 \sin C.$$

А так как  $A_1B_1 \geq A_2B_2$ , то

$$R_3 \sin C \geq r_1 \sin B + r_2 \sin A.$$

Согласно теореме синусов имеем:

$$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a}{c}, \quad \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}.$$

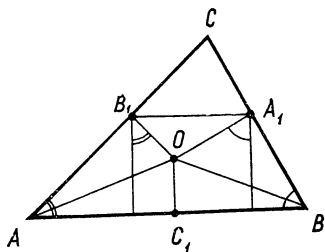


Рис. 31

Следовательно, полученное неравенство приводится к виду

$$R_3 \geq \frac{b}{c} r_1 + \frac{a}{c} r_2.$$

Аналогично этому имеем:

$$R_1 \geq \frac{b}{a} r_3 + \frac{c}{a} r_2, \quad R_2 \geq \frac{a}{b} r_3 + \frac{c}{b} r_1.$$

Сложим последние три неравенства почленно. Учитывая, что, например  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ , получим:

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) r_1 + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) r_2 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) r_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3).$$

Знак равенства имеет место лишь в том случае, если  $a = b = c$ . Кроме того, должны выполняться соотношения  $A_1B_1 \parallel AB$ ,  $B_1C_1 \parallel BC$  и  $C_1A_1 \parallel CA$ , которые означают, что  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$  и  $C_1A_1$  — средние линии треугольника  $ABC$ , а это равносильно требованию совпадения точки  $O$  с центром равностороннего треугольника.

**Решение 2.** Неравенство  $R_3 \geq \frac{a}{c} r_2 + \frac{b}{c} r_1$  получим средствами геометрии, без применения тригонометрии.

Пусть точка  $O$  лежит внутри угла  $C$  треугольника  $ABC$ , причем не обязательно внутри треугольника. Из вершин  $A$  и  $B$  проведем перпендикуляры к прямой  $OC$ , их основания обозначим через  $A_1$  и  $B_1$ . Тогда имеем:

$$2(S_{AOC} + S_{BOC}) = (AA_1 + BB_1) R_3 = ar_1 + br_2.$$

А так как  $AA_1 + BB_1 \leq AB$ , то

$$cR_3 \geq ar_1 + br_2,$$

или

$$R_3 \geq \frac{a}{c} r_1 + \frac{b}{c} r_2.$$

Покажем, что в этом равенстве  $r_1$  и  $r_2$  можно поменять местами. Действительно, если взять точку  $O_1$ , симметричную точке  $O$  относительно биссектрисы угла  $C$  треугольника  $ABC$ , то она также будет находиться внутри угла  $C$ , хотя может быть и вне треугольника  $ABC$ . При этом  $O_1C = OC = R_3$ , а расстояния от точки  $O_1$  до сторон  $BC$  и  $AC$  угла  $C$  будут равны соответственно  $r_2$  и  $r_1$ . Применив для точки  $O_1$  доказанное выше неравенство, получим:

$$R_3 \geq \frac{a}{c} r_2 + \frac{b}{c} r_1,$$

что и требовалось доказать.

Далее можно рассуждать так же, как и при решении 1.

**Решение 3.** В каждом из треугольников  $BOC$ ,  $COA$ ,  $AOB$  из вершины  $O$  проведем биссектрисы, обозначив их длины через  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ . Докажем, что  $R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(l_1 + l_2 + l_3)$ .

Обозначив  $\angle BOC = 2\alpha$ ,  $\angle COA = 2\beta$ ,  $\angle AOB = 2\gamma$ , по формуле задачи 93 (см. с. 42) находим

$$l_3 = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2} \cos \gamma.$$

А так как  $2\sqrt{R_1R_2} \leq R_1 + R_2$ , то

$$l_3 \leq \sqrt{R_1R_2} \cos \gamma.$$

Аналогично

$$l_1 \leq \sqrt{R_2R_3} \cos \alpha, \quad l_2 \leq \sqrt{R_1R_3} \cos \beta.$$

Следовательно,

$$l_1 + l_2 + l_3 \leq \sqrt{R_1R_2} \cos \gamma + \sqrt{R_1R_3} \cos \beta + \sqrt{R_2R_3} \cos \alpha,$$

где равенство имеет место лишь тогда, когда  $R_1 = R_2 = R_3$ .

Остается доказать, что

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(\sqrt{R_1R_2} \cos \gamma + \sqrt{R_1R_3} \cos \beta + \sqrt{R_2R_3} \cos \alpha).$$

Положим  $\sqrt{R_1} = x$ ,  $\sqrt{R_2} = y$ ,  $\sqrt{R_3} = z$ . Тогда

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(xy \cos \gamma + xz \cos \beta + yz \cos \alpha),$$

где  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ . Мы пришли к неравенству, доказанному ранее (см. задачу 114, с. 104).

Итак,

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(l_1 + l_2 + l_3).$$

Равенство здесь достигается лишь тогда, когда  $\alpha = \beta = \gamma$  и  $R_1 = R_2 = R_3$ , то есть лишь для правильного треугольника и его центра  $O$ . Ясно, что доказанное неравенство — усиление неравенства Эрдёша — Морделла (см. с. 128).

## I

### глава

## АФФИННЫЕ ЗАДАЧИ



### ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В представленных далее задачах речь идет о таких свойствах фигур в пространстве, как параллельность прямых и плоскостей, отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, отношение объемов многогранников. Методы и приемы решения во многом сходны с теми, которые применяются при решении аналогичных планиметрических задач. Для решения задач, кроме теорем планиметрии, используются теоремы о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве, признаки параллельности прямых и плоскостей.

При решении задач на вычисление отношения объемов находят применение следующие леммы:

1. Если вершины  $D$  и  $D_1$  тетраэдров  $ABCD$  и  $ABCD_1$  лежат по одну сторону от плоскости  $ABC$ , то эти тетраэдры равновелики тогда и только тогда, когда прямая  $DD_1$  параллельна плоскости  $ABC$ .

2. Если тетраэдры  $ABCD$  и  $ABCD_1$  имеют общую грань  $ABC$  и вершина  $D_1$  принадлежит прямой  $AD$ , то

$$\frac{V_{ABCD_1}}{V_{ABCD}} = \frac{AD_1}{AD}.$$



3. Если тетраэдры  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D$  имеют общую вершину  $D$ , а грани  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  лежат в одной плоскости, то отношение их объемов равно отношению площадей треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .

4. Если ребра трехгранного угла  $O$  пересечены двумя плоскостями соответственно в точках  $A, B, C$  и  $A_1, B_1, C_1$ , то

$$\frac{V_{OA_1B_1C_1}}{V_{OABC}} = \frac{OA_1 \cdot OB_1 \cdot OC_1}{OA \cdot OB \cdot OC}.$$

Доказательство первых трех лемм не представляет трудности. Докажем последнюю лемму, используя предыдущие.

Рассмотрим тетраэдры  $OA_1B_1C_1$ ,  $OA_1B_1C$  и  $OABC$ . Согласно лемме 2 имеем:

$$\frac{V_{OA_1B_1C_1}}{V_{OA_1B_1C}} = \frac{OC_1}{OC}.$$

Применим лемму 3 к тетраэдрам  $OA_1B_1C$  и  $OABC$ . Поскольку треугольники  $OA_1B_1$  и  $OAB$  имеют общий угол, то отношение площадей этих треугольников равно  $\frac{OA_1 \cdot OB_1}{OA \cdot OB}$ . Следовательно,

$$\frac{V_{OA_1B_1C}}{V_{OABC}} = \frac{AO_1 \cdot OB_1}{OA \cdot OB}.$$

Перемножив почленно полученные два равенства, имеем:

$$\frac{V_{OA_1B_1C_1}}{V_{OABC}} = \frac{AO_1 \cdot OB_1 \cdot OC_1}{OA \cdot OB \cdot OC}.$$

Векторные формулы и соотношения, приведенные в главе I (см. с. 26), справедливы для любых точек и векторов пространства. Кроме них, при решении задач используются еще следующие формулы и соотношения:

1) *Условие принадлежности четырех точек одной плоскости: если точки  $A, B, C$  и  $D$  принадлежат одной плоскости, причем векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$  не коллинеарны, то*

а)  $\overline{CD} = \alpha \overline{CA} + \beta \overline{CB};$

б)  $\overline{OD} = \alpha \overline{OA} + \beta \overline{OB} + (1 - \alpha - \beta) \overline{OC}$ , где  $O$  — произвольная точка;

в)  $\overline{OD} = \alpha \overline{OA} + \beta \overline{OB} + \gamma \overline{OC}$ , где  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ .

*Обратно, если одно из этих соотношений выполняется, то точки  $A, B, C$  и  $D$  принадлежат одной плоскости.*

2) *Единственность разложения вектора по трем некопланарным векторам:*

если векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  не компланарны, то из равенства

$$x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c} = x_1\bar{a} + y_1\bar{b} + z_1\bar{c}$$

следует, что  $x = x_1$ ,  $y = y_1$ ,  $z = z_1$ .

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ АФФИННЫХ ЗАДАЧ

**Пример 1.** Дана четырехугольная пирамида  $NABCD$ , основанием которой служит параллелограмм. На боковых ребрах  $NB$  и  $NC$  взяты точки  $K$  и  $L$  такие, что  $\frac{NK}{KB} = 4$  и  $NL = LC$ . Плоскость  $AKL$  пересекает ребро  $ND$  в точке  $M$ . Найти отношение  $\frac{NM}{MD}$ .

**Решение 1.** Построим сечение данной пирамиды  $NABCD$  плоскостью  $AKL$  (рис. 1). Сначала построим точку  $O$  пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$ , затем точку  $P$  пересечения прямых  $AL$  и  $NO$ , наконец, точку  $M$  пересечения прямых  $KP$  и  $ND$ .

Согласно условию задачи  $\frac{NK}{NB} = \frac{4}{5}$ . Заметим, что  $P$  — точка пересечения медиан треугольника  $ACN$ , поэтому  $\frac{NP}{NO} = \frac{2}{3}$ .

Найдем  $\lambda = \frac{NM}{ND}$ .

Обозначим площади треугольников  $NKP$  и  $NPM$  через  $S_1$  и  $S_2$ , а площадь треугольника  $NBD$  — через  $S$ . Воспользуемся леммой об отношении площадей треугольников, имеющих общий угол. Учитывая, что площади треугольников  $NOB$  и  $NOD$  равны, получим:

$$\frac{2S_1}{S} = \frac{NP \cdot NK}{NO \cdot NB} = \frac{8}{15}, \quad \frac{2S_2}{S} = \lambda \cdot \frac{NP}{NO} = \frac{2}{3} \lambda.$$

Аналогично найдем отношение площадей треугольников  $NKM$  и  $NBD$ :

$$\frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{4}{5} \lambda.$$

Из двух предыдущих равенств имеем:

$$\frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{1}{3} \lambda + \frac{4}{15}.$$

Следовательно,

$$\frac{4}{5} \lambda = \frac{1}{3} \lambda + \frac{4}{15},$$

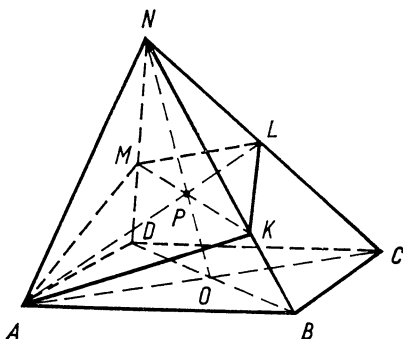


Рис. 1

откуда

$$\lambda = \frac{4}{7}.$$

Итак,  $\frac{NM}{ND} = \frac{4}{7}$ . Значит,  $\frac{NM}{MD} = \frac{4}{3}$ .

**Решение 2.** Положим  $\overline{AB} = \bar{a}$ ,  $\overline{AD} = \bar{b}$ ,  $\overline{AN} = \bar{c}$ , векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  будем считать базисными.

Точки  $A$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$  принадлежат одной плоскости. Следовательно, выполняется равенство

$$\overline{AM} = \alpha \overline{AK} + \beta \overline{AL}.$$

Выразим векторы  $AK$  и  $AL$  через базисные векторы. По формуле деления отрезка в данном отношении имеем:

$$\overline{AK} = \frac{\overline{AN} + 4\overline{AB}}{5} = \frac{4\bar{a} + \bar{c}}{5}, \quad \overline{AL} = \frac{\overline{AC} + \overline{AN}}{2} = \frac{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}}{2}.$$

Значит,

$$\overline{AM} = \left(\frac{4\alpha}{5} + \frac{\beta}{2}\right)\bar{a} + \frac{\beta}{2}\bar{b} + \left(\frac{\alpha}{5} + \frac{\beta}{2}\right)\bar{c}.$$

Теперь примем во внимание, что точка  $M$  принадлежит ребру  $ND$ . Обозначив  $\frac{NM}{MD} = x$ , получим:

$$\overline{AM} = \frac{x\bar{b} + \bar{c}}{1+x}.$$

Приравняв в двух разложениях вектора  $\overline{AM}$  коэффициенты при одних и тех же базисных векторах, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{4\alpha}{5} + \frac{\beta}{2} = 0, \\ \frac{\beta}{2} = \frac{x}{1+x}, \\ \frac{\alpha}{5} + \frac{\beta}{2} = \frac{1}{1+x}. \end{cases}$$

Решив эту систему, имеем:

$$x = \frac{4}{3}.$$

Вычисления будут несколько короче, если условие принадлежности точек  $A$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$  одной плоскости записать в виде равенства

$$\overline{NA} = \alpha \overline{NK} + \beta \overline{NL} + (1 - \alpha - \beta) \overline{NM}.$$

Убедимся в этом, решив следующую задачу.

**Пример 2.** Дана пирамида  $SABCD$ , основанием которой является параллелограмм. Проведена плоскость, пересекающая

боковые ребра  $SA, SB, SC, SD$  пирамиды в точках  $K, L, M, N$  таких, что  $\overline{SK} = k\overline{SA}, \overline{SL} = l\overline{SB}, \overline{SM} = m\overline{SC}$  и  $\overline{SN} = n\overline{SD}$ .

Найти зависимость между числами  $k, l, m, n$  и вычислить отношение объемов пирамид  $SKLMN$  и  $SABCD$  (рис. 2).

Решение 1. Согласно условию принадлежности точек  $K, L, M$  и  $N$  одной плоскости, имеем:

$$\overline{SN} = \alpha\overline{SK} + \beta\overline{SL} + \gamma\overline{SM},$$

где  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ .

Используя условие задачи, получаем:

$$n\overline{SD} = \alpha k\overline{SA} + \beta l\overline{SB} + \gamma m\overline{SC}.$$

Если  $O$  — точка пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$ , то

$$\overline{SA} + \overline{SC} = \overline{SB} + \overline{SD} = 2\overline{SO},$$

или

$$\overline{SD} = \overline{SA} - \overline{SB} + \overline{SC}.$$

Следовательно,

$$\alpha k\overline{SA} + \beta l\overline{SB} + \gamma m\overline{SC} = n(\overline{SA} - \overline{SB} + \overline{SC}).$$

Отсюда

$$\alpha k = n, \quad \beta l = -n, \quad \gamma m = n.$$

Учитывая, что  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ , получим:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{k} - \frac{1}{l} + \frac{1}{m}.$$

Обозначим объемы тетраэдров  $SKLN$  и  $SLMN$  через  $V_1$  и  $V_2$ , а объемы пирамид  $SKLMN$  и  $SABCD$  через  $V_0$  и  $V$ . Учитывая, что  $V_{SABD} = V_{SBCD} = \frac{V}{2}$ , получим:

$$\frac{2V_1}{V} = klm, \quad \frac{2V_2}{V} = lmn.$$

А так как  $V_1 + V_2 = V_0$ , то

$$\frac{V_0}{V} = \frac{1}{2} \ln(k + m).$$

Изучение полученных формул может подсказать простой способ решения задачи без использования векторных соотношений.

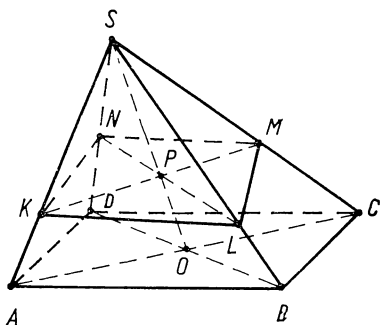


Рис. 2

Р е ш е н и е 2 . Сохраняя обозначения, использованные в решении 1, имеем:

$$\frac{V_0}{V} = \frac{V_1 + V_2}{V} = \frac{1}{2} \ln(k + m).$$

Рассматривая объем  $V_0$  пирамиды  $SKLMN$  как сумму объемов тетраэдров  $SKLM$  и  $SKMN$ , аналогично получим:

$$\frac{V_0}{V} = \frac{1}{2} km(l + n).$$

Приравняв правые части этих равенств, найдем зависимость между числами  $k, l, m, n$ :

$$lmn + kln = kmn + klm,$$

или

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{m} = \frac{1}{l} + \frac{1}{n}.$$

Таким образом, если заданы три из четырех чисел, входящих в это равенство, можно вычислить четвертое, а затем найти отношение объемов пирамид  $SKLMN$  и  $SABCD$ :

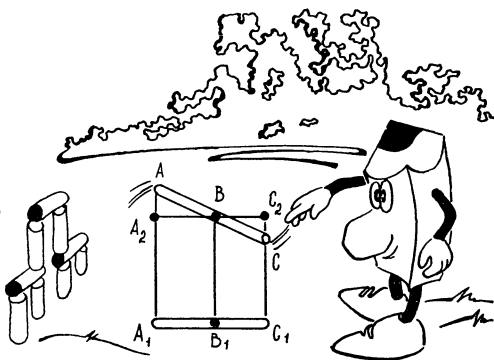
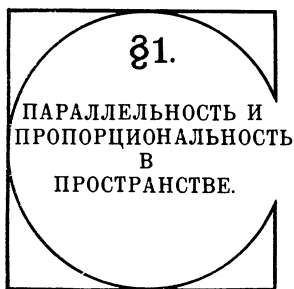
$$\frac{V_0}{V} = \frac{1}{2} km(l + n).$$

В частности, если  $k = 1, l = \frac{4}{5}, m = \frac{1}{2}$ , то

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &= 1 - \frac{5}{4} + 2 = \frac{7}{4}, \\ \frac{V_0}{V} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{4}{5} + \frac{4}{7} \right) = \frac{12}{35}. \end{aligned}$$

Решив задачу о сечении пирамиды плоскостью, мы получили формулу, которую можно использовать для вычисления отношения объемов пирамид.

Кроме приведенных решений, существуют и другие. Соотношение между числами  $k, l, m$  и  $n$  можно получить, используя результат задачи 21 (см. с. 56).



### Задачи на доказательство

1. Через концы трех ребер  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  параллелепипеда проведена плоскость  $ABC$ . Диагональ  $OD$  параллелепипеда пересекает эту плоскость в точке  $M$ . Докажите, что  $M$  — центр тяжести треугольника  $ABC$  и  $OM = \frac{1}{3} OD$ .

2. Докажите, что отрезки, соединяющие каждую вершину тетраэдра с центроидом противоположной грани, так называемые *медианы тетраэдра*, пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении  $3:1$ , считая от вершины.

3. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

4. Точки  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $AB$  и  $CD$ . Докажите, что

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{BC}).$$

5. Дан тетраэдр  $ABCD$ . Ребра  $AB$  и  $CD$  разделены точками  $M$  и  $N$  в равных отношениях:  $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND}$ . Докажите, что прямые  $AC$ ,  $BD$  и  $MN$  параллельны некоторой плоскости.

6. Два параллелограмма  $OABC$  и  $OA_1B_1C_1$  с общей вершиной  $O$  лежат в разных плоскостях. Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  параллельны некоторой плоскости.

7. Даны два параллелограмма  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ . Точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  — соответственно середины отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$ . Докажите, что отрезки  $KM$  и  $LN$  имеют общую середину.

8. На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  неплоского четырехугольника  $ABCD$  даны соответственно точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ . Докажите, что эти точки принадлежат одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{KB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MD}} \cdot \frac{\overline{DN}}{\overline{NA}} = 1$$

(см. теорему Менелая, с. 18).

9. Точки  $A, B, C, D$  не принадлежат одной плоскости. Отрезки  $AB$  и  $DC$  разделены точками  $M$  и  $N$  в равных отношениях:  $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \lambda$ , отрезки  $BC$  и  $AD$  разделены точками  $P$  и  $Q$  в равных отношениях:  $\frac{BP}{PC} = \frac{AQ}{QD} = \mu$ . Докажите, что точки  $M, N, P$  и  $Q$  принадлежат одной плоскости.

10. Плоскость, проходящая через середины  $M$  и  $N$  ребер  $AB$  и  $CD$  тетраэдра  $ABCD$ , пересекает ребро  $BC$  в точке  $P$  и ребро  $AD$  — в точке  $Q$ . Докажите, что  $\frac{BP}{PC} = \frac{AQ}{QD}$ .

### Задачи на вычисление

11. Вершины треугольника  $ABC$  лежат по одну сторону от плоскости  $\alpha$ . Треугольник  $A_1B_1C_1$  — параллельная проекция треугольника  $ABC$  на эту плоскость, точки  $M$  и  $M_1$  — центры тяжести этих треугольников. Найдите  $MM_1$ , если  $AA_1 = a$ ,  $BB_1 = b$  и  $CC_1 = c$ .

12. Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Через вершину  $A$  и центры  $P$  и  $Q$  граней  $A_1 B_1 C_1 D_1$  и  $BB_1 C_1 C$  проведена плоскость. В каком отношении делит эта плоскость ребро  $B_1 C_1$ ?

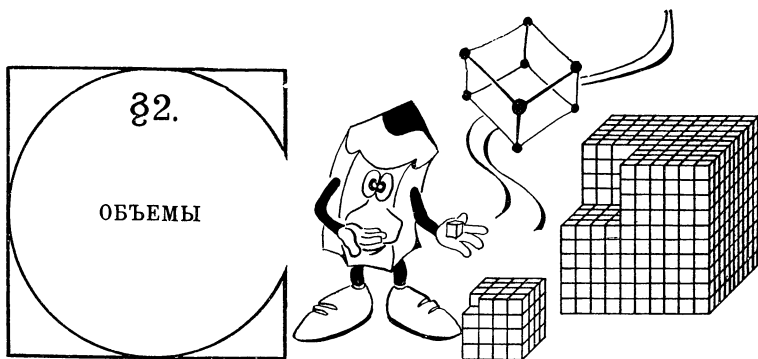
13. Основанием пирамиды  $SABCD$  служит параллелограмм. Через вершину  $A$  проведена плоскость, пересекающая ребро  $SC$  в точке  $L$ , а ребра  $SB$  и  $SD$  — в точках  $K$  и  $M$ , таких, что  $\frac{SK}{KB} = 2$ ,  $\frac{SM}{MD} = \frac{1}{2}$ . В каком отношении делит точка  $L$  ребро  $SC$ ?

### Контрольные вопросы

1) Какие теоремы используются при решении стереометрических задач с аффинным содержанием?

2) Сформулируйте леммы, которые применяются при вычислении отношения объемов.

3) Запишите условия принадлежности четырех точек одной плоскости.



14. Дан тетраэдр  $ABCD$ . Через вершину  $A$  и точку  $K$ , взятую на ребре  $BD$ , проведена плоскость, делящая объем тетраэдра пополам. Известно, что  $\frac{DK}{KB} = \frac{3}{2}$ . Найдите  $\frac{DL}{LC}$ , где  $L$  — точка пересечения секущей плоскости с ребром  $CD$ .

15. Дана треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ . Через сторону  $BC$  основания и середину  $K_1$  ребра  $A_1B_1$  проведена плоскость, делящая призму на два многогранника. Найдите отношение их объемов.

16. Плоскость, параллельная двум скрещивающимся ребрам тетраэдра  $ABCD$ , делит его на два равновеликих многогранника. В каком отношении остальные ребра тетраэдра делятся точками их пересечения с этой плоскостью?

17. Докажите, что плоскость, проходящая через середины противоположных ребер тетраэдра, делит его на два равновеликих многогранника.

18. Дана треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ . Плоскость пересекает ребра  $AA_1$ ,  $BB_1$ , и  $CC_1$  соответственно в точках  $L$ ,  $M$  и  $N$ . Найдите отношение объема многогранника  $ABCLMN$  к объему данной призмы, если

$$\frac{AL}{AA_1} = l, \quad \frac{BM}{BB_1} = m, \quad \frac{CN}{CC_1} = n.$$

19. Для каждой вершины тетраэдра строится точка, симметричная ей относительно центра противоположной грани. Найдите отношение объема тетраэдра, вершинами которого являются построенные точки, к объему исходного тетраэдра.

20. В основании пирамиды  $SABCD$  лежит параллелограмм  $ABCD$ . Через вершину  $A$  и точку  $K$  — середину ребра  $SC$  проведена плоскость, пересекающая ребра  $SB$  и  $SD$  в точках  $M$  и  $N$ .



Доказать, что

$$\frac{1}{3} \leq \frac{V_1}{V} \leq \frac{3}{8},$$

где  $V$  — объем пирамиды  $SABCD$ ,  $V_1$  — объем пирамиды  $SAMKN$ .

### *Контрольные вопросы*

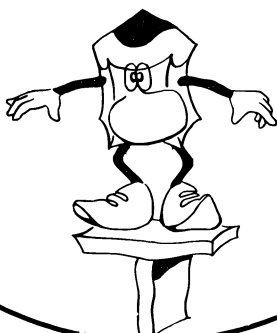
- 1) Какие прямые в пространстве называются параллельными?
- 2) Какие прямые в пространстве называются скрещивающимися?
- 3) Что значит: прямая и плоскость параллельны? Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.
- 4) Известно, что прямая параллельна плоскости. Параллельна ли она любой прямой, лежащей в этой плоскости?
- 5) Верно ли утверждение, что плоскости параллельны, если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна прямой другой плоскости? Сформулируйте признак параллельности плоскостей.
- 6) Запишите основные векторные формулы и соотношения, применяющиеся для решения стереометрических задач с аффинным содержанием.

# СТЕРЕОМЕТРИЯ

## II

### глава

## МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ



### ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Далее представлены задачи на доказательство перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве, на вычисление расстояний и углов и др. Для решения таких задач особенно часто применяются теоремы о двух и трех перпендикулярах. Используются также тригонометрические соотношения, известные из курса планиметрии, и некоторые другие, в частности, теорема косинусов для трехгранного угла.

*Если  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — плоские углы трехгранного угла и  $A$  — величина двугранного угла, противолежащего плоскому углу  $\alpha$ , то*

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A.$$

Теорему можно доказать с помощью теоремы косинусов для треугольника другими способами (см. решение задачи 41, с. 65).

При решении стереометрических задач возрастает роль векторного метода. Векторное решение многих задач значительно проще решений, полученных элементарными средствами, и отличается общностью.

Обратим внимание на два замечательных тождества.

1) Для любых четырех точек  $A, B, C, D$  имеет место равенство

$$AB^2 + CD^2 - AD^2 - BC^2 = 2\overline{AC} \cdot \overline{DB}$$

(оно было доказано на с. 26).

2) Для любых точек  $A, B, C, D$  имеет место векторное равенство

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} = 0.$$

Для доказательства выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} &= \overline{AB}(\overline{AD} - \overline{AC}) + (\overline{AC} - \overline{AB}) \cdot \overline{AD} = \\ &= -\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC}(\overline{AD} - \overline{AB}) = \overline{AC} \cdot \overline{BD}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} = 0.$$

Поскольку оба равенства справедливы при любом расположении точек  $A, B, C$  и  $D$  в пространстве, то ими можно пользоваться для решения как планиметрических, так и стереометрических задач.

Некоторые метрические задачи удобно решать координатным методом. При этом находит применение уравнение плоскости в прямоугольной системе координат:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где  $A, B, C$  — координаты вектора, перпендикулярного плоскости.

Положение плоскости в пространстве однозначно определяется заданием трех ее точек, не принадлежащих одной прямой. Пусть данная плоскость пересекает оси координат в точках  $M_1(a, 0, 0)$ ,  $M_2(0, b, 0)$ ,  $M_3(0, 0, c)$ , но не проходит через начало координат. Подставив координаты этих точек в общее уравнение плоскости получим:

$$Aa + D = 0, Bb + D = 0, Cc + D = 0,$$

где числа  $a, b, c$  и  $D$  отличны от нуля. Отсюда находим

$$A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c},$$

и уравнение  $Ax + By + Cz + D = 0$  приводится к виду:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Полученное уравнение называют *уравнением плоскости в отрезках*.

Для вычисления расстояния  $d$  от точки  $M_1(x_1, x_2, x_3)$  до плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$  применяется формула

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

**Пример 3.** Выразить через плоские углы  $\alpha, \beta, \gamma$  трехгранного угла косинус угла между его ребром и биссектрисой противолежащего плоского угла.

**Решение 1.** Отложим на ребрах трехгранного угла от его вершины  $O$  единичные отрезки  $OA, OB$  и  $OC$  (рис. 3). Обозначим через  $D$  середину отрезка  $BC$ . Так как треугольник  $BOC$  равнобедренный, то  $OD$  — биссектриса угла  $BOC$ .

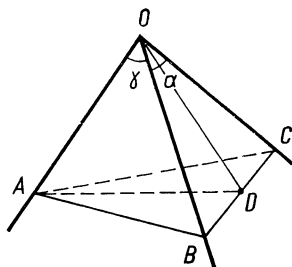


Рис. 3

Согласно условию задачи  $\angle BOC = \alpha, \angle COA = \beta, \angle AOB = \gamma$ . Требуется найти величину  $\varphi$  угла  $AOD$ . Из равнобедренных треугольников  $BOC, AOC, AOB$  находим:

$$BC = 2 \sin \frac{\alpha}{2}, \quad CA = 2 \sin \frac{\beta}{2}, \quad AB = 2 \sin \frac{\gamma}{2}, \quad OD = \cos \frac{\alpha}{2}.$$

По формуле, выражающей длину медианы треугольника через длины его сторон, имеем:

$$\begin{aligned} AD^2 &= \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} + 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} - \\ &\quad - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 - \cos \beta - \cos \gamma - \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Воспользуемся теоремой косинусов. Подставив найденные значения  $OD$  и  $AD$  в формулу

$$\cos \varphi = \frac{OA^2 + OD^2 - AD^2}{2OD},$$

после упрощений получим:

$$\cos \varphi = \frac{\cos \beta + \cos \gamma}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Вычисления оказались довольно громоздкими.

Приведем более краткое решение с использованием теоремы косинусов для трехгранного угла.

**Решение 2.** Пусть  $OD$  — биссектриса угла  $BOC$ . Плоскость  $AOD$  образует с плоскостью  $BOC$  смежные двугранные углы, противолежащие плоским углам  $\beta$  и  $\gamma$ . Если  $x$  — мера первого из них, то  $(180^\circ - x)$  — мера второго. Применив к двугранным углам  $OACD$  и  $OABD$  теорему косинусов, имеем:

$$\cos \beta = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \varphi + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi \cos x,$$

$$\cos \gamma = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \varphi + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi \cos (180^\circ - x).$$

Сложим эти равенства почленно и, учитывая, что  $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$ , получим:

$$\cos \beta + \cos \gamma = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \varphi,$$

откуда

$$\cos \varphi = \frac{\cos \beta + \cos \gamma}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Рассмотрим векторное решение задачи.

**Решение 3.** Если  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  — единичные векторы, сонаправленные с ребрами  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  трехгранного угла, то предстоит найти косинус угла  $\varphi$  между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b} + \vec{c}$  (последний сонаправлен с биссектрисой угла  $BOC$ ). По определению скалярного произведения имеем

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \gamma, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \cos \beta.$$

Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b} + \vec{c}|} = \frac{\cos \beta + \cos \gamma}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Как видим, решение получилось простым и компактным.

Следует иметь в виду, что векторный метод, как и любой другой, не является универсальным, хотя он и применим к решению широкого круга геометрических задач. Обычно векторный метод с успехом применяется для доказательства перпендикулярности прямых и отрезков, для вычисления расстояний и углов. Иногда условие и заключение теоремы трудно записать в векторной форме, и более эффективным является другой метод.

Следующую задачу решим традиционными средствами, а также координатным методом.

**Пример 4.** Все плоские углы при вершине  $D$  тетраэдра  $ABCD$  прямые. В тетраэдр вписан куб так, что одна из его вершин совпадает с вершиной  $D$  тетраэдра, а противоположная ей вершина принадлежит грани  $ABC$ . Вычислить длину ребра куба, если  $DA = a$ ,  $DB = b$  и  $DC = c$ .

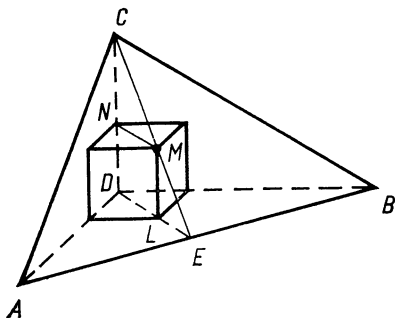


Рис. 4

**Решение 1.** Из условия задачи следует, что три ребра куба, выходящие из вершины  $D$ , лежат на ребрах прямого трехгранного угла (рис. 4). Обозначим через  $L$  и  $M$  вершины куба, принадлежащие граням  $ABD$  и  $ABC$ . Поскольку  $DL$  — диагональ квадрата, то точка  $L$  принадлежит биссектрисе  $DE$  прямоугольного треугольника  $ABD$ .

А так как  $LM \parallel CD$ , то точка  $M$  принадлежит отрезку  $CE$ . Пусть  $N$  — вершина куба, принадлежащая ребру  $CD$ . Тогда  $MN \parallel DE$ , а треугольники  $CDE$  и  $CNM$  подобны.

По формуле, приведенной в задаче 93 (см. с. 42), находим

$$DE = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$

Обозначим длину ребра куба через  $x$ . Тогда  $CN = c - x$ ,  $MN = x\sqrt{2}$ . Составим пропорцию

$$\frac{c-x}{c} = \frac{(a+b)x}{ab},$$

откуда

$$x = \frac{abc}{ab+bc+ca}.$$

**Решение 2.** Выразим двумя способами объем тетраэдра  $ABCD$  через данные и искомые величины и полученные выражения приравняем. Объем тетраэдра  $ABCD$  равен сумме объемов трех тетраэдров:  $MABD$ ,  $MBCD$  и  $MCAD$ . Так как треугольник  $ABD$  — прямоугольный и  $CD$  — высота тетраэдра  $ABCD$ , то его объем равен  $\frac{1}{6}abc$ . Аналогично найдем объемы трех других тетраэдров и получим уравнение

$$(ab+bc+ca)x = abc,$$

откуда

$$x = \frac{abc}{ab+bc+ca}.$$

Преимущества второго способа решения очевидны.

**Решение 3.** Введем в пространстве прямоугольную систему координат:  $D(0, 0, 0)$ ,  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, b, 0)$ ,  $C(0, 0, c)$ .

Запишем уравнение плоскости  $ABC$ :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Точка  $M$ , принадлежащая плоскости  $ABC$ , одинаково удалена от граней  $ABD$ ,  $BCD$ ,  $CAD$ , поэтому координаты точки  $M$  равны:  $x = y = z$ . Учитывая это, получим:

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = 1.$$

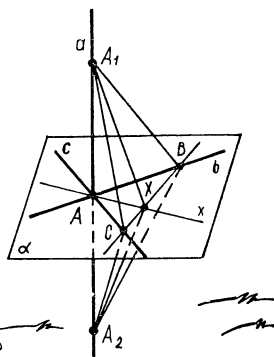
Значит, искомое соотношение можно записать так:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Краткость координатного решения объясняется тем, что три ребра данного тетраэдра, выходящие из одной вершины, попарно перпендикулярны, поэтому прямоугольная система координат естественным образом связывается с тетраэдром. Среди координат точек много нулей, и вычисления очень просты. Обратим внимание на то, что для решения задачи не потребовалось искать вспомогательные линии. Достаточно было условие задачи и вопрос записать в виде уравнения, чтобы решение ее получилось автоматически.

### *Контрольные вопросы*

- 1) Дайте определение скалярного произведения векторов.
- 2) Перечислите свойства скалярного умножения векторов.
- 3) Как используется скалярное произведение для вычислений расстояний и углов?
- 4) Какие векторные соотношения и формулы применяются при решении метрических задач?



### Задачи на доказательство

21. Докажите, что если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна плоскости (*теорема о двух перпендикулярах*).

22. Докажите, что если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна также наклонной, и обратно, если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной (*теорема о трех перпендикулярах*).

23. Докажите, что противоположные ребра  $AB$  и  $CD$  тетраэдра  $ABCD$  перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

24. Докажите, что если две пары противоположных ребер тетраэдра перпендикулярны, то ребра третьей пары также перпендикулярны.

25. Докажите, что если основанием одной из высот тетраэдра есть ортоцентр соответствующей грани, то противоположные ребра тетраэдра попарно перпендикулярны, и обратно.

26. Докажите, что высоты тетраэдра пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда его противоположные ребра попарно перпендикулярны.

27. Докажите, что если противоположные ребра тетраэдра попарно перпендикулярны, то плоские углы при каждой вершине тетраэдра одноименные (все острые, прямые или тупые).

28. Докажите, что если биссектрисы двух плоских углов трехгранного угла перпендикулярны, то биссектриса его третьего плоского угла перпендикулярна каждой из первых двух биссектрис.

29. Докажите, что плоскость, проходящая через концы трех ребер куба, имеющих общую вершину, перпендикулярна диагонали куба, выходящей из той же вершины.

30. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Прямые  $AB_1, BC_1, CD_1, DA_1$  пересечены произвольной плоскостью, параллельной грани  $ABCD$ . Докажите, что точки пересечения являются вершинами квадрата.



31. Докажите, что параллелепипед, у которого все диагонали равны, прямоугольный.

### Задачи на построение

32. Даны скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$ . Постройте прямую, пересекающую обе данные прямые и перпендикулярную каждой из них.

33. Постройте общий перпендикуляр скрещивающихся диагоналей двух смежных граней куба.

34. Через диагональ куба проведите сечение плоскостью так, чтобы площадь сечения была наименьшей.

35. Две скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$  пересечены прямой  $c$  соответственно в точках  $A$  и  $B$ . Постройте прямую  $d$ , перпендикулярную  $c$  и пересекающую прямые  $a$  и  $b$  в точках  $A_1$  и  $B_1$ , для которых  $AA_1 = BB_1$ .

### Контрольные вопросы

1) Верно ли утверждение, что прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум сторонам трапеции, лежащей в этой плоскости?

2) Какие плоскости называются перпендикулярными?

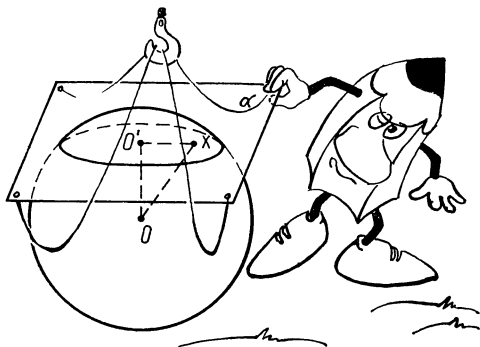
3) Сформулируйте признак перпендикулярности двух плоскостей.

4) Дайте определение угла между прямыми.

5) Дайте определение угла между прямой и плоскостью.

6) Что называется расстоянием между скрещивающимися прямыми?

7) Одна из скрещивающихся прямых лежит в плоскости, другая — перпендикулярна этой плоскости. Как расположен общий перпендикуляр данных прямых?



36. Вычислите длину медианы  $DM$  тетраэдра  $ABCD$ , если известны длины его ребер:  $DA = a$ ,  $DB = b$ ,  $DC = c$ ,  $BC = a_1$ ,  $CA = b_1$ ,  $AB = c_1$ .

37. Вычислите длину отрезка, соединяющего середины ребер  $AB$  и  $CD$  тетраэдра  $ABCD$ , если известны длины ребер тетраэдра.

38. Выразите косинус угла между двумя противоположными ребрами тетраэдра через длины его ребер.

39. Дан тетраэдр  $ABCD$  с прямыми плоскими углами при вершине  $D$ . Найдите радиус сферы, описанной около тетраэдра, если  $DA = a$ ,  $DB = b$ ,  $DC = c$ .

40. Противоположные ребра тетраэдра равны соответственно  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Вычислите радиус сферы, описанной около тетраэдра.

41. Плоские углы трехгранного угла равны  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Найдите его двугранные углы.

42. Прямая  $a$  образует с плоскостью угол  $\alpha$ . В данной плоскости проведена прямая  $b$ , образующая с проекцией прямой  $a$  на плоскость угол  $\beta$ . Найдите угол  $\phi$  между прямыми  $a$  и  $b$ .

43. Непересекающиеся диагонали двух смежных граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами  $\alpha$  и  $\beta$ . Найдите угол  $\gamma$  между этими диагоналями.

44. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен  $\alpha$ , боковая грань наклонена к основанию под углом  $\beta$ . Найдите зависимость между углами  $\alpha$  и  $\beta$ .

45. Плоский угол при вершине боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равен  $\alpha$ . Вычислите угол  $\gamma$  при вершине ее диагонального сечения.



## ГЛАВА I. АФФИННЫЕ ЗАДАЧИ

### § 1. Параллельность и пропорциональность в пространстве

#### Задачи на доказательство

1. **Решение 1.** Обозначьте через  $E$  середину отрезка  $AB$  и докажите, что диагональ  $OD$  параллелепипеда пересекает отрезок  $CE$  в точке  $M$  такой, что

$$\frac{EM}{MC} = \frac{OM}{MD} = \frac{OE}{CD} = \frac{1}{2}.$$

**Решение 2.** Выразите вектор  $\overline{OM}$  через векторы  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  и  $\overline{OC}$  двумя способами:

$$\overline{OM} = k \overline{OD} = k(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}), \quad \overline{OM} = \alpha \overline{OA} + \beta \overline{OB} + \gamma \overline{OC},$$

где  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ .

**Решение 3.** Пусть  $M$  — центроид треугольника  $ABC$ . Тогда

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}).$$

Применив правило параллелепипеда, докажите, что

$$\overline{OM} = \frac{1}{3} \overline{OD}.$$

2. **Решение 1.** Пусть  $ABCD$  — данный тетраэдр и точка  $K$  — середина его ребра  $CD$ . На отрезках  $AK$  и  $BK$  постройте соответственно точки  $B_1$  и  $A_1$  такие, что  $\frac{AB_1}{B_1K} = \frac{BA_1}{A_1K} = 2$ . Тогда  $AA_1$  и  $BB_1$  — медианы тетраэдра. Обозначив точку их пересечения через  $M$ , установите, что

$$\frac{AM}{MA_1} = \frac{BM}{MB_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = 3.$$

**Решение 2.** Выразите вектор  $\overline{AM}$  через векторы  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  и  $\overline{AD}$  двумя способами:

$$\overline{AM} = \alpha \overline{AA_1} = \frac{1}{3} \alpha (\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD}),$$

$$\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \overline{AB} + \beta \overline{BB_1} = (1 - \beta) \overline{AB} + \frac{1}{3} \beta \overline{AC} + \frac{1}{3} \beta \overline{AD}.$$

Но векторы  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  и  $\overline{AD}$  не компланарны, следовательно,

$$\alpha = \beta \text{ и } \frac{1}{3} \alpha = 1 - \beta,$$

откуда

$$\alpha = \beta = \frac{3}{4}.$$

**Решение 3.** Постройте на медиане  $AA_1$  тетраэдра  $ABCD$  точку  $M$  так, чтобы  $\frac{AM}{MA_1} = 3$ . Докажите, что

$$\overline{OM} = \frac{1}{4} (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}),$$

где  $O$  — произвольная точка.

Если  $M_1$  — точка, делящая какую-либо из трех других медиан тетраэдра в отношении 3 : 1, считая от вершины, то для вектора  $\overline{OM}_1$  получится то же самое выражение, то есть точки  $M$  и  $M_1$  совпадают.

**3. Решение 1.** Пусть отрезок  $EF$  соединяет середины ребер  $BC$  и  $AD$ , а отрезок  $KL$  — середины ребер  $AB$  и  $CD$  тетраэдра  $ABCD$  (рис. 5). Докажите, что точки  $K$ ,  $E$ ,  $L$ ,  $F$  являются вершинами параллелограмма, поэтому отрезки  $EF$  и  $KL$  имеют общую середину.

**Решение 2.** Пусть  $DD_1$  — медиана тетраэдра  $ABCD$  (рис. 5). Рассмотрим треугольник  $ADE$ , где  $E$  — середина ребра  $BC$ . Из условия задачи следует, что  $AF = FD$  и  $AD_1 = 2D_1E$ . Отсюда выведите, что отрезок  $EF$  пересекает медиану  $DD_1$

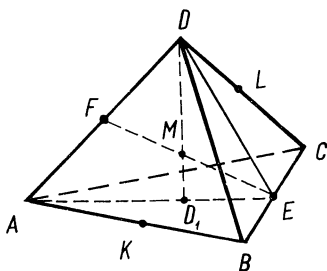


Рис. 5

в точке  $M$  такой, что  $\frac{DM}{DM_1} = 3$  и  $EM = MF$ .

Другими словами, отрезок  $EF$  проходит через точку  $M$  пересечения медиан тетраэдра и делится ею пополам.

**Решение 3.** Пусть  $M$  — середина отрезка  $EF$ . Тогда

$$\overline{OM} = \frac{1}{2} (\overline{OE} + \overline{OF}) = \frac{1}{4} (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}).$$

Из решения 3 задачи 2 следует, что  $M$  — точка пересечения медиан тетраэдра  $ABCD$ .

Таким образом, медианы тетраэдра и три отрезка, соединяющие середины его противоположных ребер, пересекаются в одной точке. Эту точку называют центроидом тетраэдра.

**4. Решение 1.** Имеем:

$$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DN}, \quad \overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN}.$$

А так как  $\overline{MA} + \overline{MB} = 0$  и  $\overline{CD} + \overline{DN} = 0$ , то

$$2\overline{MN} = \overline{AD} + \overline{BC}.$$

**Решение 2.** По формуле середины отрезка имеем:

$$\overline{OM} = \frac{1}{2} (\overline{OA} + \overline{OB}), \quad \overline{ON} = \frac{1}{2} (\overline{OC} + \overline{OD}).$$

Поэтому

$$\overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM} = \frac{1}{2} (\overline{OC} + \overline{OD} - \overline{OA} - \overline{OB}) = \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{BC}).$$

Решение 3. Пусть  $K$  — середина отрезка  $AC$ . Тогда  $MK$  и  $KN$  — средние линии треугольников  $ABC$  и  $ACD$ , поэтому

$$\overline{MK} = \frac{1}{2} \overline{BC} \text{ и } \overline{KN} = \frac{1}{2} \overline{AD}.$$

Таким образом,

$$\overline{MN} = \overline{MK} + \overline{KN} = \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{BC}).$$

5. Решение 1. Согласно условию задачи имеем:

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \lambda \overline{OB}}{1 + \lambda}, \quad \overline{ON} = \frac{\overline{OC} + \lambda \overline{OD}}{1 + \lambda}, \text{ где } \lambda = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}.$$

Следовательно,

$$\overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM} = \frac{\overline{OC} - \overline{OA} + \lambda (\overline{OD} - \overline{OB})}{1 + \lambda} = \frac{\overline{AC} + \lambda \overline{BD}}{1 + \lambda}.$$

Так как вектор  $MN$  допускает разложение по  $\overline{AC}$  и  $\overline{BD}$ , то эти три вектора компланарны, а прямые  $MN$ ,  $AC$  и  $BD$  параллельны плоскости.

Решение 2. Имеем:

$$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AC} + \overline{CN}, \quad \overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BD} + \overline{DN}.$$

Умножим второе равенство на  $\lambda$  и сложим эти равенства почленно.

Учитывая, что  $\overline{MA} + \lambda \overline{MB} = 0$  и  $\overline{CN} + \lambda \overline{DN} = 0$ , получим:

$$(1 + \lambda) \overline{MN} = \overline{AC} + \lambda \overline{BD}.$$

Решение 3. Построим на ребре  $AD$  точку  $L$  такую, что  $\frac{AL}{LD} = \lambda$ . Тогда  $AC \parallel LN$ ,  $BD \parallel LM$ . Следовательно, прямые  $AC$ ,  $BD$  и  $MN$  параллельны плоскости  $LMN$ .

6. Решение 1. Обозначим через  $M$  и  $M_1$  центры параллелограммов  $OABC$  и  $OA_1B_1C_1$ . Тогда  $MM_1$  — средняя линия треугольника  $OBV_1$  и  $\overline{MM_1} = \frac{1}{2} \overline{BV_1}$ . А так как  $M$  и  $M_1$  — середины отрезков  $AC$  и  $A_1C_1$ , то

$$\overline{MM_1} = \frac{1}{2} (\overline{AA_1} + \overline{CC_1})$$

(см. задачу 4, с. 125). Отсюда следует, что векторы  $\overline{AA_1}$ ,  $\overline{BB_1}$  и  $\overline{CC_1}$  компланарны, а прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  параллельны некоторой плоскости.

Решение 2. Имеем:

$$\overline{AA_1} = \overline{OA_1} - \overline{OA}, \quad \overline{CC_1} = \overline{OC_1} - \overline{OC}, \quad \overline{BB_1} = \overline{OB_1} - \overline{OB}.$$

А так как

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{OC}, \quad \overline{OB_1} = \overline{OA_1} + \overline{OC_1},$$

то

$$\overline{BB_1} = \overline{AA_1} + \overline{CC_1}.$$

Решение 3. Применим параллельный перенос. Построим точку  $D$  такую, что  $\overline{A_1D} = \overline{AB}$ . Тогда  $\overline{BD} = \overline{AA_1}$ . Докажем, что  $\overline{DB_1} = \overline{CC_1}$ .

Действительно, так как  $OABC$  и  $ABDA_1$  — параллелограммы, то  $\overline{OC} = \overline{AB} = \overline{A_1D}$ . Следовательно,  $OCDA_1$  — параллелограмм. Учитывая, что и  $OA_1B_1C_1$  — параллелограмм, получаем:  $\overline{CD} = \overline{OA_1} = \overline{C_1B_1}$ . Отсюда следует, что  $CDB_1C_1$  — также параллелограмм, поэтому  $\overline{DB_1} = \overline{CC_1}$ . Значит, прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  параллельны плоскости  $BB_1D$ .

7. Р е ш е н и е 1. Пусть  $O$  и  $O_1$  — точки пересечения диагоналей параллелограммов  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ . Докажите, что середины отрезков  $OO_1$ ,  $KM$  и  $LN$  совпадают.

Р е ш е н и е 2. Используя векторную формулу для середины отрезка, докажите, что

$$\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{ON}.$$

Р е ш е н и е 3. Воспользуйтесь формулой задачи 4 (см. с. 125) и докажите, что

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}.$$

8. Р е ш е н и е 1. Пусть точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  принадлежат одной плоскости. Если плоскость  $KLM$  параллельна прямой  $AC$ , то  $KL \parallel AC$  и  $MN \parallel AC$ . В таком случае доказываемое равенство вытекает из теоремы о пропорциональных отрезках. Если же плоскость  $KLM$  пересекает прямую  $AC$  в точке  $P$ , то согласно теореме Менелая для треугольника (см. задачу 12, с. 18) имеем:

$$\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BL}}{\overrightarrow{LC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PA}} = -1, \quad \frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MD}} \cdot \frac{\overrightarrow{DN}}{\overrightarrow{NA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PC}} = -1.$$

Перемножив эти два равенства почленно, получим доказываемое соотношение.

Обратное предложение легко доказывается способом от противного. Допустим, что плоскость  $KLM$  пересекает прямую  $AD$  в точке  $N_1$ . Тогда из данного соотношения и соотношения, записанного для точки  $N_1$ , следует, что точки  $N$  и  $N_1$  совпадают.

Решение 2. Пусть  $\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}} = \alpha$ ,  $\frac{\overrightarrow{BL}}{\overrightarrow{LC}} = \beta$ ,  $\frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MD}} = \gamma$ ,  $\frac{\overrightarrow{DN}}{\overrightarrow{NA}} = \delta$ . Будем рассматривать векторы, отложенные от точки  $K$ .

Тогда имеем:

$$\overrightarrow{KL} = \frac{\overrightarrow{KB} + \beta \overrightarrow{KC}}{1 + \beta}, \quad \overrightarrow{KM} = \frac{\overrightarrow{KC} + \gamma \overrightarrow{KD}}{1 + \gamma},$$

$$\overrightarrow{KN} = \frac{\overrightarrow{KD} + \delta \overrightarrow{KA}}{1 + \delta} \quad \text{или} \quad \overrightarrow{KN} = \frac{\overrightarrow{KD} - \alpha \delta \overrightarrow{KB}}{1 + \delta},$$

так как  $\overrightarrow{KA} = -\alpha \overrightarrow{KB}$ .

Точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  принадлежат одной плоскости тогда и только тогда, когда существуют такие числа  $\lambda$  и  $\mu$ , что

$$\overrightarrow{KN} = \lambda \overrightarrow{KL} + \mu \overrightarrow{KM},$$

или числа  $x$  и  $y$  такие, что

$$(1 + \delta) \overrightarrow{KN} = x(1 + \beta) \overrightarrow{KL} + y(1 + \gamma) \overrightarrow{KM}.$$

После подстановки в это равенство значений векторов  $\overrightarrow{KL}$ ,  $\overrightarrow{KM}$  и  $\overrightarrow{KN}$  получим:

$$(\alpha\delta + x) \overrightarrow{KB} + (\beta x + y) \overrightarrow{KC} + (\gamma y - 1) \overrightarrow{KD} = 0.$$

Но векторы  $\overrightarrow{KB}$ ,  $\overrightarrow{KC}$  и  $\overrightarrow{KD}$  не компланарны, следовательно,

$$\alpha\delta + x = 0, \quad \beta x + y = 0, \quad \gamma y - 1 = 0.$$

Отсюда находим необходимое и достаточное условие принадлежности точек  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  одной плоскости:  $\alpha\beta\gamma\delta = 1$ .

9. Р е ш е н и е 1. Примените к четырехугольнику  $ABCD$  теорему Менелая (с. 18).

Решение 2. Разделите отрезок  $MN$  точкой  $S$  в отношении  $\mu$ :  $\frac{\overline{MS}}{\overline{SN}} = \mu$ .

Докажите, что  $\overline{OS} = \frac{\overline{OP} + \lambda \overline{OQ}}{1 + \lambda}$ , откуда следует, что точка  $S$  делит отрезок  $PQ$  в отношении  $\lambda$  и прямые  $MN$  и  $PQ$  пересекаются, то есть точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$  и  $Q$  принадлежат одной плоскости.

Решение 3. Постройте параллелограмм  $ABCD_1$  и спроектируйте на его плоскость в направлении  $DD_1$  отрезки  $MN$  и  $PQ$ .

10. Решение 1. Примените теорему Менелая (см. задачу 8, с. 141).

Решение 2. Пусть  $\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \lambda$ . Постройте на ребре  $AD$  точку  $Q_1$  так, чтобы  $\frac{\overline{AQ_1}}{\overline{Q_1D}} = \lambda$ . Воспользуйтесь результатом задачи 9 и докажите, что точка  $Q_1$  совпадает с точкой  $Q$ . Значит,  $\frac{AQ}{QD} = \frac{BP}{PC}$ .

Кроме того, из решения задачи 9 вторым способом выведите, что отрезок  $PQ$  делится прямой  $MN$  пополам.

### Задачи на вычисление

11.  $\frac{1}{3}(a + b + c)$ .

Решение 1. Установите, что медиана  $A_1D_1$  треугольника  $A_1B_1C_1$  является параллельной проекцией медианы  $AD$  треугольника  $ABC$ , а точка  $M_1$  — проекцией точки  $M$ . Рассмотрите трапецию  $ADD_1A_1$  и докажите, что

$$MM_1 = \frac{1}{3} AA_1 + \frac{2}{3} DD_1.$$

Решение 2. Воспользуйтесь векторной формулой центроида треугольника и докажите, что

$$\overline{MM_1} = \frac{1}{3} (\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1}).$$

12.  $\frac{B_1N}{NC_1} = 2$ , где  $N$  — точка пересечения ребра  $B_1C_1$  с плоскостью  $APQ$ .

Решение 1. Построим сечение параллелепипеда  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  плоскостью  $APQ$ . Пусть  $P_1$  — центр грани  $ABCD$  и  $Q_1$  — середина ребра  $BC$ . Прямые  $PP_1$  и  $QQ_1$  параллельны ребру  $AA_1$ , точки  $P_1$  и  $Q_1$  — проекции точек  $P$  и  $Q$  на плоскость  $ABC$ . Прямые  $PQ$  и  $P_1Q_1$  пересекаются в некоторой точке  $R$ , принадлежащей плоскости  $ABC$ , прямые  $AR$  и  $BC$  — в точке  $M$ . Точка  $N$ , симметричная  $M$  относительно  $Q$ , есть искомая точка пересечения плоскости  $APQ$  с ребром  $B_1C_1$ . Найдем  $\frac{B_1N}{NC_1}$ .

Треугольники  $PP_1R$  и  $QQ_1R$  гомотетичны, а так как  $QQ_1 = \frac{1}{2} PP_1$ , то  $Q_1R = \frac{1}{2} P_1R$ , или  $Q_1R = P_1Q_1 = \frac{1}{2} AB$ .

Треугольники  $ABM$  и  $RQ_1M$  также гомотетичны, значит,  $MQ_1 = \frac{1}{2} BM$ . А так как  $Q_1$  — середина отрезка  $BC$ , то  $CM = 2MB$ . Следовательно,

$$\frac{B_1N}{NC_1} = \frac{CM}{MB} = 2.$$

Решение 2. Более экономное решение получим, выполнив следующее построение. Сначала построим точку  $L$  пересечения прямых  $AP$  и  $CC_1$ . Затем проведем прямую  $LQ$ , которая пересечет ребро  $B_1C_1$  в искомой точке  $N$ .

Заметим, что  $PC_1$  — средняя линия треугольника  $ACL$ , а  $NC_1$  — средняя линия треугольника  $MCL$ . Следовательно,

$$NC_1 = \frac{1}{2} MC = \frac{1}{2} B_1N,$$

или

$$\frac{B_1N}{NC_1} = 2.$$

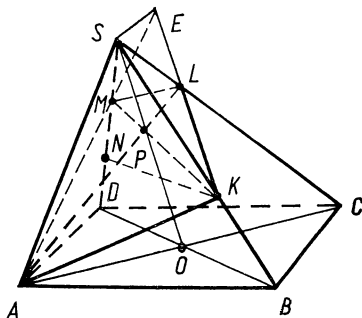


Рис. 6

Решение 3. Пусть плоскость  $APQ$  пересекает ребро  $B_1C_1$  в точке  $N$ . Положим  $\overline{AB} = \vec{a}$ ,  $\overline{AD} = \vec{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \vec{c}$ . Так как векторы  $\overline{AN}$ ,  $\overline{AP}$  и  $\overline{AQ}$  компланарны, а последние два вектора не коллинеарны, то

$$\begin{aligned} \overline{AN} &= k\overline{AP} + l\overline{AQ} = k\left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \vec{c}\right) + l\left(\vec{a} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}\right) = \\ &= \left(\frac{k}{2} + l\right)\vec{a} + \frac{k+l}{2}\vec{b} + \left(k + \frac{l}{2}\right)\vec{c}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\overline{AN} = \overline{AB} + \overline{BB_1} + \overline{B_1N} = \vec{a} + \lambda\vec{b} = \vec{c},$$

где  $\lambda$  — число, которое требуется найти.

Так как векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  не компланарны, то полученные два разложения вектора  $\overline{AN}$  совпадают, поэтому

$$\frac{k}{2} + l = 1, \quad \frac{k+l}{2} = \lambda, \quad k + \frac{l}{2} = 1.$$

Из этой системы находим, что  $\lambda = \frac{2}{3}$ , поэтому

$$\frac{B_1N}{NC_1} = 2.$$

$$13. \frac{SL}{LC} = \frac{2}{5}.$$

Решение 1. Пусть медиана  $SO$  треугольника  $SBD$  пересекает отрезок  $KM$  в точке  $P$  (рис. 6). Прямые  $AP$  и  $SC$  пересекаются в точке  $L$ . Сначала вычислим отношение  $\frac{SP}{PO}$ .

В плоскости  $SBD$  через точку  $K$  проведем прямую, параллельную прямой  $BD$ , которая пересечет ребро  $SD$  в точке  $N$  такой, что  $\frac{SN}{ND} = 2$ . Обозначив через  $R$  точку пересечения отрезков  $KN$  и  $SO$ , имеем:

$$\frac{SR}{SO} = \frac{SK}{SB} = \frac{2}{3},$$

или

$$SR = \frac{2}{3} SO.$$



А так как  $P$  — точка пересечения медиан треугольника  $SKN$ , то

$$SP = \frac{2}{3} SR = \frac{4}{9} SO,$$

или

$$\frac{SP}{PO} = \frac{4}{5}.$$

К треугольнику  $SOC$  и секущей  $AL$  применим теорему Менелая (см. задачу 12, с. 18). Получим:

$$\frac{SL}{LC} = \frac{2}{5}.$$

Решение 2. Так как прямая  $BC$  параллельна плоскости  $SAD$ , то линия  $l$  пересечения плоскостей  $SAD$  и  $SBC$  параллельна прямой  $BC$ . Пусть прямая  $AM$  пересекает  $l$  в точке  $E$ , а прямая  $KE$ , проходящая через точку  $L$ , пересекает прямую  $BC$  в точке  $F$ . Найдём  $\frac{SE}{SF}$ .

Треугольники  $MAD$  и  $MES$ ,  $KES$  и  $KFB$  гомотетичны. Поэтому

$$SE = \frac{1}{2} AD, \quad BF = \frac{1}{2} SE = \frac{1}{4} AD.$$

Значит,

$$CF = \frac{5}{4} AD.$$

Треугольники  $LES$  и  $LFC$  также гомотетичны, поэтому

$$\frac{SL}{LC} = \frac{SE}{CF} = \frac{2}{5}.$$

Решение 3. Пусть  $\overline{AB} = \bar{a}$ ,  $\overline{AD} = \bar{b}$ ,  $\overline{AS} = \bar{c}$ . Тогда

$$\overline{AK} = \frac{2\bar{a} + \bar{c}}{3}, \quad \overline{AM} = \frac{\bar{b} + 2\bar{c}}{3}, \quad \overline{AL} = \frac{\bar{a} + \bar{b} + \lambda\bar{c}}{1 + \lambda}, \quad \text{где } \lambda = \frac{CL}{LS}.$$

Векторы  $\overline{AK}$ ,  $\overline{AM}$  и  $\overline{AL}$  компланарны, а векторы  $\overline{AK}$  и  $\overline{AM}$  не коллинеарны, поэтому

$$\overline{AL} = \alpha \overline{AK} + \beta \overline{AM}.$$

Подставив соответствующие значения, будем иметь:

$$\overline{AL} = \frac{2\alpha}{3} \bar{a} + \frac{\beta}{3} \bar{b} + \frac{\alpha + 2\beta}{3} \bar{c}.$$

В силу единственности разложения вектора по трем некопланарным векторам, получим

$$\frac{1}{1 + \lambda} = \frac{2\alpha}{3}, \quad \frac{1}{1 + \lambda} = \frac{\beta}{3}, \quad \frac{\lambda}{1 + \lambda} = \frac{\alpha + 2\beta}{3}.$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{5}{2} \text{ и } \frac{SL}{LC} = \frac{2}{5}.$$

## § 2. Объемы

### 14. 5.

Решение 1. На ребре  $CD$  постройте точку  $L$  так, чтобы отрезок  $KL$  разделил площадь треугольника  $BCD$  пополам. Для этого проведите медиану

СМ этого треугольника, а затем через точку  $M$  проведите прямую, параллельную  $CK$ , которая пересечет ребро  $CD$  в искомой точке  $L$ . Так как  $CL \parallel CK$ , то  $\frac{DL}{DC} = \frac{DM}{DK}$ , откуда выведите, что  $\frac{DL}{LC} = 5$ .

Из этого решения видно, что искомая плоскость пересечет ребро  $CD$ , если  $\frac{DK}{KB} > 1$  и ребро  $BC$ , если  $\frac{DK}{KB} < 1$ .

Решение 2. Пользуясь леммой 4, докажите, что  $\frac{DK \cdot DL}{DB \cdot DC} = \frac{1}{2}$ .

Отсюда выведите, что  $\frac{DL}{LC} = 5$ .

15.  $\frac{7}{5}$ .

Решение 1. Пусть плоскость  $BCK_1$  пересекает ребро  $A_1C_1$  в точке  $L_1$ . Тогда  $K_1L_1$  — средняя линия треугольника  $A_1B_1C_1$ . Обозначьте через  $K$ ,  $L$ ,  $M$  середины сторон  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$  основания  $ABC$ . Усеченная пирамида  $ABCA_1K_1L_1$  разбивается плоскостями  $K_1KL$  и  $K_1KM$  на три части: призму  $AKLA_1K_1L_1$ , тетраэдр  $K_1KBM$  и призму  $K_1KML_1LC$ , объемы которых обозначьте через  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ , а объем данной призмы — через  $V$ .

Установите, что  $V_1 = \frac{1}{4}V$ ,  $V_2 = \frac{1}{12}V$  и  $V_3 = \frac{1}{4}V$  (объем параллелепипеда  $CLKMC_1L_1K_1M_1$  равен  $\frac{1}{2}V$ ). Следовательно,

$$V_1 + V_2 + V_3 = \frac{7}{12}V.$$

Решение 2. Пусть  $M$  и  $M_1$  — середины ребер  $BC$  и  $B_1C_1$ . Плоскость  $K_1MM_1$  разбивает многогранник  $K_1L_1BCC_1B_1$  на призму  $K_1MM_1L_1CC_1$  и четырехугольную пирамиду  $K_1BMM_1B_1$ . Докажите, что объемы их равны соответственно  $\frac{1}{4}V$  и  $\frac{1}{6}V$ , а объем многогранника равен  $\frac{5}{12}V$ , где  $V$  — объем данной призмы.

Решение 3. Пусть плоскость  $BCK_1$  пересекает продолжение ребра  $AA_1$  в точке  $D$ . Обозначьте объемы пирамид  $DABC$  и  $DAK_1L_1$  через  $V_1$  и  $V_2$ , а объем данной призмы через  $V$ . Установите, что

$$V_1 = \frac{2}{3}V, \quad V_2 = \frac{1}{8}V_1.$$

Следовательно,

$$V_2 = \frac{1}{12}V \text{ и } V_1 - V_2 = \frac{7}{12}V.$$

Таким образом, объем усеченной пирамиды  $ABCA_1K_1L_1$  равен  $\frac{7}{12}V$ , объем многогранника  $K_1L_1BCC_1B_1$  равен  $\frac{5}{12}V$ , а отношение их объемов равно  $\frac{7}{5}$ .

16. Решение 1. Пусть плоскость, параллельная ребрам  $AC$  и  $BD$  тетраэдра, пересекает ребра  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  соответственно в точках  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  (рис. 7).

Так как  $KL \parallel AC$  и  $MN \parallel AC$ , то  $KL \parallel MN$ . Точно так же  $KN \parallel LM$ . Значит,  $KL MN$  — параллелограмм. Обозначим  $\frac{AK}{KB} = \alpha$ , тогда  $\frac{AN}{ND} = \frac{CM}{MD} = \frac{CL}{LB} = \alpha$ .

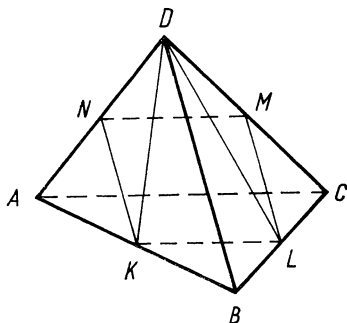


Рис. 7

Многогранник  $BDKLMN$  разобьем на две пирамиды  $DKLMN$  и  $DBKL$ , объемы которых обозначим через  $V_1$  и  $V_2$ . Аналогично многогранник  $ACKLMN$  разобьем на две пирамиды  $CKLMN$  и  $CAKN$ , объемы их обозначим через  $V_3$  и  $V_4$ , а объем тетраэдра  $ABCD$  — через  $V$ . Так как  $\frac{S_{BKL}}{S_{ABC}} = \frac{1}{(1+\alpha)^2}$ , то согласно лемме 3 (см. с. 120), имеем:

$$\frac{V_2}{V} = \left( \frac{1}{1+\alpha} \right)^2.$$

Аналогично получим

$$\frac{V_4}{V} = \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{V_4}{V_2} = \alpha^2.$$

Пользуясь леммой 2 (см. с. 119), находим, что  $\frac{V_3}{V_1} = \alpha$ .

Поскольку многогранники  $ACKLMN$  и  $BDKLMN$  равновелики, то

$$V_1 + V_2 = V_3 + V_4,$$

или

$$V_1 + V_2 = \alpha V_1 + \alpha^2 V_2.$$

Это равенство приведем к виду

$$(1-\alpha)(V_1 + (1+\alpha)V_2) = 0.$$

Отсюда  $\alpha = 1$ . Значит, искомая плоскость проходит через середины ребер  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  тетраэдра.

Решение 2. Пусть искомая плоскость отсекает от тетраэдра  $ABCD$  многогранник  $BDKLMN$ , объем которого должен составлять половину объема тетраэдра  $ABCD$ . В грани  $BCD$  через точку  $M$  проведем прямую, параллельную  $BC$  и пересекающую ребро  $BD$  в точке  $H$  (рис. 8).

Плоскость  $HMN$  параллельна плоскости  $ABC$  (на основании признака параллельности плоскостей) и разбивает многогранник  $BDKLMN$  на призму с основанием  $BKL$  и тетраэдр  $DHMN$ , объемы которых

обозначим через  $V_1$  и  $V_2$ . Сохраняя обозначение  $\frac{AK}{KB} = \alpha$ , находим:

$$\frac{S_{BKL}}{S_{ABC}} = \frac{1}{(1+\alpha)^2}.$$

Учитывая, что  $V_1 = 3V_{NBKL}$ , получим:

$$\frac{V_1}{3V_{NABC}} = \frac{V_{NBKL}}{V_{NABC}} = \frac{1}{(\alpha+1)^2}.$$

В силу леммы 2 (см. с. 119) имеем:

$$\frac{V_{NABC}}{V} = \frac{AN}{AD} = \frac{\alpha}{\alpha+1}.$$

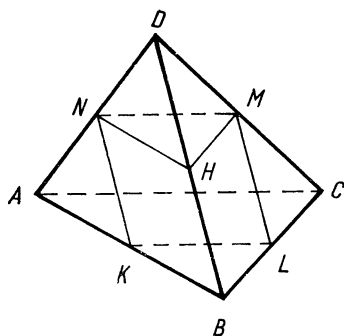


Рис. 8

Из полученных равенств следует, что

$$\frac{V_1}{V} = \frac{3\alpha}{(\alpha + 1)^3}.$$

Тетраэдр  $DHMN$  гомотетичен тетраэдру  $DABC$ . А так как

$$\frac{DN}{DA} = \frac{1}{\alpha + 1}, \text{ то } \frac{V_2}{V} = \frac{1}{(\alpha + 1)^3}.$$

Таким образом,

$$\frac{V_1 + V_2}{V} = \frac{3\alpha + 1}{(\alpha + 1)^3}.$$

Согласно условию задачи  $V_1 + V_2 = \frac{1}{2} V$ , следовательно,  $(\alpha + 1)^3 = 6\alpha + 1$ , или  $(\alpha - 1)(\alpha^2 + 4\alpha + 1) = 0$ . Откуда  $\alpha = 1$ .

17. Р е ш е н и е 1. Пусть плоскость, проходящая через середины  $M$  и  $N$  ребер  $AB$  и  $CD$  тетраэдра  $ABCD$ , пересекает ребра  $BC$  и  $AD$  соответственно в точках  $P$  и  $Q$  (рис. 9).

Прежде всего заметим, что тетраэдры  $ACMD$  и  $BCMD$  равновелики, так как треугольники  $ACM$  и  $BCM$  равновелики.

Докажем, что объем многогранника  $ACMPNQ$  равен объему тетраэдра  $ACMD$ .

Имеем:

$$V_{ACMPNQ} = V_{ACMD} + V_{MNPC} - V_{MNQD}.$$

Из решения 2 задачи 10 (см. с. 142) следует, что отрезок  $PQ$  делится прямой  $MN$  пополам, поэтому треугольники  $MNP$  и  $MNQ$  равновелики. По условию  $CN = DN$ . Значит, тетраэдры  $MNPC$  и  $MNQD$  равновелики. Таким образом,

$$V_{ACMPNQ} = V_{ACMD} = \frac{1}{2} V_{ABCD}.$$

Р е ш е н и е 2. Многогранник  $ACMPNQ$  состоит из четырехугольной пирамиды  $CMPNQ$  и тетраэдра  $ACMQ$ , а многогранник  $BDMPNQ$  — из четырехугольной пирамиды  $DMPNQ$  и тетраэдра  $BDMP$ .

Поскольку  $CN = DN$ , то пирамиды  $CMPNQ$  и  $DMPNQ$  с общим основанием  $MPNQ$  равновелики. Остается доказать равновеликость тетраэдров  $ACMQ$  и  $BMPD$ .

Согласно задаче 10 (см. с. 142), имеем:

$$\frac{BP}{BC} = \frac{AQ}{AD}.$$

Пусть  $BP = kBC$ . Тогда  $S_{BPM} = kS_{BCM}$ , поэтому

$$V_{BPM} = kV_{BCM}.$$

А в силу равенства  $AQ = kAD$  получим

$$V_{ACMQ} = kV_{ACMD}.$$

Поскольку  $V_{BCMD} = V_{ACMD}$ , то равновеликость тетраэдров  $ACMD$  и  $BDMP$  доказана. Значит, плоскость  $MPNQ$  делит объем тетраэдра  $ABCD$  пополам.

$$18. \frac{1}{3} (l + m + n).$$

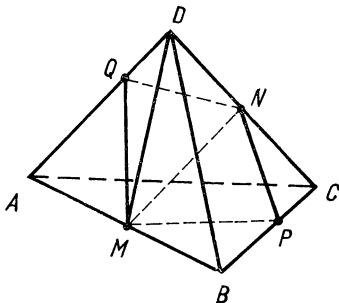


Рис. 9

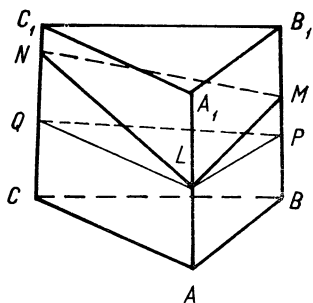


Рис. 10

Решение 1. Для определенности будем считать, что  $l < m < n$ , и через точку  $L$  проведем сечение  $LPQ$ , параллельное основанию призмы (рис. 10).

Объем многогранника  $ABCLMN$  равен сумме объемов призмы  $ABCLPQ$  и двух тетраэдров  $LMNQ$  и  $LMQP$ .

Обозначим объем многогранника  $ABCLMN$  через  $V_1$ , а объемы призмы  $ABCA_1B_1C_1$  и  $ABCLPQ$  соответственно через  $V$  и  $V_2$ .

Заметив, что тетраэдр  $LMNQ$  равновелик тетраэдру  $LNQP$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V} &= \frac{V_2 + V_{LMQP} + V_{LNQP}}{V} = \\ &= \frac{3AL + PM + QN}{3AA_1} = \\ &= \frac{3AL + (BM - AL) + (CN - AL)}{3AA_1} = \frac{AL + BM + CN}{3AA_1} = \frac{1}{3} (l + m + n). \end{aligned}$$

Решение 2. Объем многогранника  $ABCLMN$  равен сумме объемов трех тетраэдров  $LABC$ ,  $LBCM$  и  $LMCN$ . Но тетраэдр  $LBCM$  равновелик тетраэдру  $ABCM$ , так как прямая  $AL$  параллельна плоскости  $BCM$ . Точно так же докажем, что тетраэдр  $LMCN$  равновелик тетраэдру  $AMCN$ , который, в свою очередь, равновелик тетраэдру  $ABCN$ . Таким образом,

$$\frac{V_1}{V} = \frac{V_{LABC} + V_{MABC} + V_{NABC}}{V} = \frac{AL + BM + CN}{3AA_1} = \frac{1}{3} (l + m + n).$$

19.  $\left(\frac{5}{3}\right)^3$ .

Решение 1. Пусть  $A_1$  — центроид грани  $BCD$ , точка  $A_2$  симметрична вершине  $A$  тетраэдра относительно  $A_1$  и  $M$  — точка пересечения медиан тетраэдра  $ABCD$ . Согласно задаче 2 (см. с. 138) имеем

$$\overline{MA_1} = \frac{1}{3} \overline{AM}, \quad \overline{A_1A_2} = \overline{AA_1} = \frac{4}{3} \overline{AM}.$$

Следовательно,

$$\overline{MA_2} = \overline{MA_1} + \overline{A_1A_2} = \frac{5}{3} \overline{AM},$$

или

$$\overline{MA_2} = -\frac{5}{3} \overline{MA}.$$

Аналогичный результат получим для точек  $B_2, C_2, D_2$ , симметричных вершинам  $B, C, D$  тетраэдра относительно центроидов противоположных граней.

Значит, тетраэдр  $A_2B_2C_2D_2$  гомотетичен тетраэдру  $ABCD$ , точка  $M$  — центр гомотетии, коэффициент гомотетии  $k = -\frac{5}{8}$ , поэтому отношение их объемов равно  $\left(\frac{5}{3}\right)^3$ .

Решение 2. Так как точка  $A_1$  является серединой отрезка  $AA_2$  и центроидом треугольника  $BCD$ , то

$$\frac{1}{2} (\overline{OA_2} + \overline{OA}) = \frac{1}{3} (\overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}),$$

где  $O$  — любая точка.

Для точки пересечения медиан тетраэдра  $ABCD$  имеет место формула

$$\overline{OM} = \frac{1}{4} (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$$

(см. решение 3 задачи 2, с. 139).

Пусть точка  $O$  совпадает с точкой  $M$ . Тогда получим:

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = \overline{0},$$

а предыдущее равенство принимает вид:

$$\frac{1}{2} (\overline{MA_2} + \overline{MA}) = -\frac{1}{3} \overline{MA},$$

откуда

$$\overline{MA_2} = -\frac{5}{3} \overline{MA}.$$

Далее поступаем так же, как и при решении 1.

20. Р е ш е н и е 1. Пусть диагонали параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ , а отрезки  $SO$  и  $AL$  (медиана треугольника  $SAC$ ) — в точке  $P$

(рис. 6, с. 143). Обозначим:  $\frac{SK}{SB} = x$ ,  $\frac{SM}{SD} = y$  и, учитывая, что  $\frac{SP}{SO} = \frac{2}{3}$ , найдем зависимость между  $x$  и  $y$ .

Вектор  $\overline{SP}$  выразим двумя способами через векторы  $\overline{SB}$  и  $\overline{SD}$ . Пусть  $\frac{\overline{KP}}{\overline{PM}} = \lambda$ . По формуле деления отрезка в данном отношении имеем:

$$\overline{SP} = \frac{\overline{SK} + \lambda \overline{SM}}{1 + \lambda} = \frac{x \overline{SB} + \lambda y \overline{SD}}{1 + \lambda}.$$

С другой стороны,

$$\overline{SP} = \frac{2}{3} \overline{SO} = \frac{1}{3} (\overline{SB} + \overline{SD}).$$

А так как векторы  $\overline{SB}$  и  $\overline{SD}$  неколлинеарны, то

$$\frac{x}{1 + \lambda} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\lambda y}{1 + \lambda} = \frac{1}{3}.$$

Исключив из этой системы уравнений  $\lambda$ , получим

$$x + y = 3xy, \quad y = \frac{x}{3x - 1}.$$

Теперь выразим  $\frac{V_1}{V}$  как функцию  $x$ .

Обозначим объемы тетраэдров  $SAKM$  и  $SKLM$  через  $V_2$  и  $V_3$ . Заметим, что  $V_{SABD} = V_{SBCD} = \frac{1}{2} V$ , и воспользуемся леммой 4 (см. с. 120). Получим:

$$\frac{2V_2}{V} = xy, \quad \frac{2V_3}{V} = \frac{1}{2} xy.$$

А как так  $V_2 + V_3 = V_1$ , то

$$\frac{V_1}{V} = \frac{3}{4} xy.$$

Но  $y = \frac{x}{3x-1}$ , следовательно,

$$\frac{V_1}{V} = \frac{3x^2}{4(3x-1)}, \text{ где } \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

Пусть  $f(x) = \frac{x^2}{3x-1}$ , тогда  $f'(x) = \frac{(3x-2)x}{(3x-1)^2}$ .

Отсюда следует, что  $f'(x) = 0$  при  $x = \frac{2}{3}$ ,  $f'(x) < 0$  при  $\frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}$ ,  $f'(x) > 0$  при  $x > \frac{2}{3}$ . Следовательно, функция  $\frac{V_1}{V}$  в точке  $x = \frac{2}{3}$  имеет наименьшее значение, равное  $\frac{1}{3}$ , а на концах промежутка  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  — одно и то же наибольшее значение, равное  $\frac{3}{8}$ , то есть

$$\frac{1}{3} \leq \frac{V_1}{V} \leq \frac{3}{8}.$$

**Решение 2.** Пусть  $\overline{AB} = \overline{l}_1$ ,  $\overline{AD} = \overline{l}_2$ ,  $\overline{AS} = \overline{l}_3$ . Векторы  $\overline{l}_1$ ,  $\overline{l}_2$ ,  $\overline{l}_3$  будем считать базисными.

Условие принадлежности точек  $A$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$  одной плоскости имеет вид:

$$\overline{AL} = \alpha \overline{AK} + \beta \overline{AM}.$$

Обозначим  $\frac{BK}{KS} = x$ ,  $\frac{DM}{DS} = y$  и выразим векторы  $\overline{AK}$  и  $\overline{AM}$  через базисные:

$$\overline{AK} = \frac{\overline{l}_1 + x\overline{l}_3}{1+x}, \quad \overline{AM} = \frac{\overline{l}_2 + y\overline{l}_3}{1+y}.$$

Значит,

$$\overline{AL} = \frac{\alpha}{1+x} \overline{l}_1 + \frac{\beta}{1+y} \overline{l}_2 + \left( \frac{\alpha x}{1+x} + \frac{\beta y}{1+y} \right) \overline{l}_3.$$

А так как  $L$  — середина отрезка  $CS$  и  $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$ , то

$$\overline{AL} = \frac{1}{2} (\overline{AC} + \overline{AS}) = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AS}),$$

или

$$\overline{AL} = \frac{1}{2} \overline{l}_1 + \frac{1}{2} \overline{l}_2 + \frac{1}{2} \overline{l}_3.$$

В двух разложениях вектора  $\overline{AL}$  приравняем коэффициенты при базисных векторах. Имеем:

$$\frac{\alpha}{1+x} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\beta}{1+y} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\alpha x}{1+x} + \frac{\beta y}{1+y} = \frac{1}{2},$$

откуда следует, что  $x + y = 1$ .

Далее, рассуждая так же, как и при решении задачи первым способом, получим:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{3}{4(1+x)(1+y)},$$

или

$$\frac{V_1}{V} = \frac{3}{4(1+x)(2-x)},$$

где  $0 \leq x \leq 1$ .

Исследование этой функции легко выполнить без применения производной. Так как квадратный трехчлен  $(1+x)(2-x)$  при  $x = \frac{1}{2}$  имеет наибольшее значение, равное  $\frac{3}{2}$ , а на границах промежутка  $[0, 1]$  принимает одно и то же значение, равное 2, то

$$\frac{1}{3} \leq \frac{V_1}{V} \leq \frac{3}{8}.$$

Задача может быть решена и без применения векторов с использованием приема сравнения объемов (см. пример 2, с. 122).

## ГЛАВА II. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

### § 3. Перпендикулярность в пространстве

#### Задачи на доказательство

**Решение 1.** Пусть в плоскости  $\alpha$  даны две пересекающиеся прямые  $b$  и  $c$ , прямая  $a$  перпендикулярна каждой из этих прямых и проходит через точку их пересечения  $O$ . В плоскости  $\alpha$  через точку  $O$  проведите произвольную прямую  $d$  и докажите, что она перпендикулярна прямой  $a$ .

Для доказательства выберите на прямой  $a$  две точки  $A$  и  $A_1$ , симметричные относительно  $O$ , и проведите прямую  $l$ , пересекающую прямые  $b$ ,  $c$  и  $d$  соответственно в некоторых точках  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Установите, что треугольник  $ADA_1$  равнобедренный и, следовательно, его медиана  $DO$  является также высотой.

**Решение 2.** Пусть прямые  $b$ ,  $c$  и  $d$ , лежащие в плоскости  $\alpha$ , проходят через точку  $O$ , как и прямая  $a$ , перпендикулярная прямым  $b$  и  $c$ . Постройте вспомогательную прямую  $l$ , пересекающую прямые  $b$ ,  $c$ ,  $d$  в точках  $B$ ,  $C$ ,  $D$  так, чтобы  $BD = DC$  (это всегда можно сделать, используя свойство диагоналей параллелограмма). Точки  $B$ ,  $C$  и  $D$  соедините с произвольной точкой  $A$  прямой  $a$ , отличной от  $O$ . Выразите медианы  $AD$  и  $OD$  треугольников  $ABC$  и  $OBC$  через их стороны:

$$AD^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}, \quad OD^2 = \frac{OB^2 + OC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}.$$

Используя теорему Пифагора, отсюда выведите, что

$$AD^2 - OD^2 = OA^2.$$

Недостатком этого способа (как и предыдущего) является то, что доказательство дается лишь для частного случая, когда прямая  $a$  проходит через точку  $O$  пересечения прямых  $b$  и  $c$ . Используя определение угла между скрещивающимися прямыми, нетрудно доказать, что утверждение теоремы остается в силе и тогда, когда прямая  $a$  через точку  $O$  не проходит и  $d$  — любая прямая, лежащая в плоскости.

Применив скалярное произведение векторов, теорему можно доказать сразу в общем виде.

**Решение 3.** Пусть прямые  $b$  и  $c$ , лежащие в плоскости  $\alpha$ , пересекаются в точке  $O$ . Проведите в плоскости  $\alpha$  произвольную прямую  $d$  и докажите, что прямая  $a$ , перпендикулярная  $b$  и  $c$ , перпендикулярна также и прямой  $d$ . Для этого на прямых  $b$  и  $c$  выберите соответственно точки  $B$  и  $C$ , отлич-



ные от точки  $O$ , а на прямых  $a$  и  $d$  выберите пары несовпадающих точек  $A$  и  $A_1$ ,  $D$  и  $D_1$ . Разложите вектор  $\overrightarrow{DD_1}$  по неколлинеарным векторам  $\overrightarrow{OB}$  и  $\overrightarrow{OC}$ :

$$\overrightarrow{DD_1} = x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}.$$

Умножив обе части этого равенства на вектор  $\overrightarrow{AA_1}$ , установите, что  $\overrightarrow{AA_1} \times \overrightarrow{DD_1} = 0$ .

22. Решение 1. Пусть  $AC \perp \alpha$ ,  $AB$  — наклонная,  $BC$  — ее проекция на плоскость  $\alpha$  (рис. 11). Прямая  $l$ , лежащая в плоскости  $\alpha$ , проходит через точку  $B$  и перпендикулярна  $BC$ . Отложим на  $l$  по обе стороны от точки  $B$  равные отрезки  $BM$  и  $BN$ . Тогда  $CM = CN$  как наклонные к прямой  $l$ , имеющие равные проекции  $BM$  и  $BN$ ,  $AM = BN$  как наклонные к плоскости  $\alpha$ , имеющие равные проекции  $CM$  и  $CN$ . Следовательно, треугольник  $AMN$  равнобедренный и его медиана  $AB$  является также высотой, то есть  $AB \perp l$ .

Доказательство обратной теоремы аналогично.

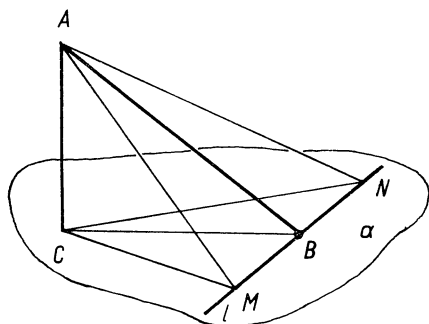


Рис. 11

Решение 2. Из прямоугольных треугольников  $AMC$  и  $ABC$  по теореме Пифагора находим:  $AM^2 = AC^2 + CM^2$ ,  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ . Отсюда  $AM^2 - AB^2 = CM^2 - BC^2$ .

Так как  $BM \perp BC$ , то  $CM^2 - BC^2 = BM^2$ . Следовательно,  $AM^2 - AB^2 = BM^2$ , и согласно теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник  $ABM$  прямоугольный:  $BM \perp AB$ .

Обратная теорема доказывается аналогично.

Решение 3. Пусть прямая  $l$ , лежащая в плоскости  $\alpha$ , перпендикулярна  $BC$  (прямая  $l$  может и не проходить через точку  $B$ ). Из определения перпендикуляра к плоскости следует, что  $AC \perp l$ . Итак, прямая  $l$

перпендикулярна прямым  $BC$  и  $AC$ , лежащим в плоскости  $ABC$ , следовательно, согласно теореме о двух перпендикулярах,  $l \perp AB$ . Аналогично доказывается и обратная теорема.

Решение 4. Имеем:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ . Выберем на прямой  $l$ , лежащей в плоскости  $\alpha$ , две точки  $M$  и  $N$ . Так как  $AC \perp \alpha$ , то  $AC \perp l$  и  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ . Следовательно,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{MN}.$$

Если  $BC \perp l$ , то  $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ , поэтому  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ , то есть  $AB \perp l$ , и наоборот.

23. Решение 1. Из вершины  $C$  тетраэдра  $ABCD$  проведем перпендикуляр  $CM$  к прямой  $AB$  и точку  $M$  соединим с точкой  $D$ . Обозначим  $\angle BMD = \varphi$ . По теореме Пифагора из треугольников  $ACM$  и  $BCM$  находим

$$AC^2 - BC^2 = AM^2 - BM^2.$$

Применив теорему косинусов к треугольникам  $ADM$  и  $BDM$ , получим:

$$AD^2 - BD^2 = AM^2 - BM^2 + 2AB \cdot DM \cos \varphi.$$

Из этого равенства вычтем предыдущее. Тогда получим:

$$AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2 = 2AB \cdot DM \cos \varphi.$$

Согласно теореме о двух перпендикулярах, если  $AB \perp CD$ , то  $\cos \varphi = 0$ , и наоборот. Таким образом, из полученного равенства следует, что  $AB \perp CD$  тогда и только тогда, когда

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

Решение 2. Для любых четырех точек пространства  $A, B, C, D$  имеет место соотношение

$$AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2 = 2\overline{AB} \cdot \overline{CD}.$$

Отсюда следует, что  $AB \perp CD$  тогда и только тогда, когда

$$AC^2 + BD^2 = AC^2 + BD^2.$$

Решение 3. Введем в пространство прямоугольную систему координат так, чтобы вершины тетраэдра  $ABCD$  имели координаты:  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(x_1; 0; 0)$ ,  $C(x_2; y_2; 0)$ ,  $D(x_3; y_3; z_3)$ . Используя формулу расстояния между двумя точками, найдем, что

$$AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2 = 2x_1(x_3 - x_2).$$

Далее заметим, что  $AB \perp CD$  тогда и только тогда, когда  $x_2 = x_3$ .

24. Решение 1. Пусть  $ABCD$  — данный тетраэдр,  $\overline{AB} \perp \overline{CD}$  и  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ . Проведите высоту  $DH$  тетраэдра. Тогда  $\overline{BH} \perp \overline{AC}$  и  $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ . Докажите, что  $\overline{AH} \perp \overline{BC}$  и, следовательно,  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ .

Решение 2. Воспользуйтесь тождеством

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} = 0.$$

Решение 3. Воспользуйтесь результатом задачи 23.

25. Решение 1. Примените теорему о трех перпендикулярах.

Решение 2. Воспользуйтесь векторным равенством

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AB} \cdot \overline{DH} = \overline{AB} \cdot \overline{CH}.$$

26. Решение 1. Если высоты тетраэдра пересекаются в одной точке, то в силу теоремы о трех перпендикулярах противоположные ребра тетраэдра попарно перпендикулярны.

Докажем обратное утверждение. Пусть противоположные ребра тетраэдра  $ABCD$  перпендикулярны и  $DH_4$  — высота тетраэдра (рис. 12). Тогда точка  $H_4$  является ортоцентром грани  $ABC$  (см. задачу 25, с. 135). Проведем высоту  $AM$  треугольника  $ABC$ . Согласно теореме о двух перпендикулярах прямая  $BC$  перпендикулярна плоскости  $ADM$ . Поэтому  $BC \perp DM$  и ортоцентр  $H_1$  грани  $BCD$  принадлежит  $DM$ . Таким образом, высоты  $AH_1$  и  $DH_4$  тетраэдра являются высотами треугольника  $ADM$  и, следовательно, пересекаются.

Точно так же докажем, что высота  $BH_2$  тетраэдра пересекается с каждой из высот  $AH_1$  и  $DH_4$ . А так как никакие три высоты тетраэдра не лежат в одной плоскости, то это возможно лишь при условии, что высота  $BH_2$  проходит через точку  $H$  пересечения высот  $AH_1$  и  $DH_4$ . Аналогичное заключение можно сделать и о высоте  $CH_3$  тетраэдра.

Решение 2. Доказательство обратной теоремы будет нагляднее, если дополнительно провести высоту  $MN$  треугольника  $ADM$  (рис. 12). Поскольку прямая  $BC$  перпендикулярна плоскости  $ADM$ , то  $BC \perp MN$ . Значит,  $MN$  — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых  $AD$  и  $BC$ . Так как высоты  $AH_1$  и  $DH_4$  тетраэдра являются также высотами треугольника  $ADM$ , то прямая  $MN$  проходит через точку их пересечения  $H$ . Ребро  $AD$  перпендикулярно плоскости  $BCN$  по теореме о двух перпендикулярах, поэтому  $CN \perp AD$ . Отсюда следует, что ортоцентр  $H_2$  грани  $ACD$  принадлежит прямой  $CN$ , а высота  $BH_2$  лежит в плоскости  $BCN$ . Высота  $DH_4$  пересекает эту плоскость в точке  $H$ . А так как любые две высоты тетраэдра пересекаются, то точка  $H$  принадлежит прямой  $BH_2$ . Аналогично докажем, что точка  $H$  принадлежит также высоте  $CH_3$  тетраэдра.

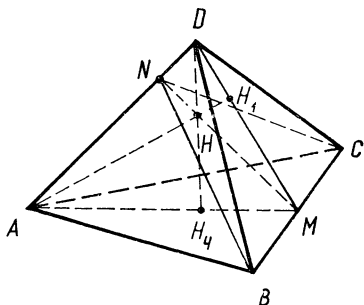


Рис. 12

Таким образом, все четыре высоты тетраэдра пересекаются в одной точке. Кроме того, мы установили, что общие перпендикуляры противоположных ребер тетраэдра также проходят через эту точку.

**Р е ш е н и е 3.** Пусть высоты тетраэдра  $ABCD$  пересекаются в точке  $H$ . Тогда  $\overline{AB} \cdot \overline{DH} = 0$ ,  $\overline{AB} \cdot \overline{CH} = 0$ . А так как

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AB} \cdot \overline{DH} = \overline{AB} \cdot \overline{CH},$$

то  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$ , или  $AB \perp CD$ . Аналогично докажем, что  $AC \perp BD$  и  $AD \perp BC$ .

Теперь докажем истинность векторного равенства

$$\overline{OH} = \frac{1}{2} (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}),$$

где  $O$  — центр сферы, описанной около тетраэдра. Оно потребуется в дальнейшем.

Так как  $H$  — точка пересечения высот тетраэдра  $ABCD$ , то  $\overline{DH} \cdot \overline{AB} = 0$  и, как мы уже доказали,  $\overline{CD} \cdot \overline{AB} = 0$ . Кроме того,  $\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2 = 0$ . Отсюда находим, что

$$(\overline{OH} - \overline{OD}) \cdot \overline{AB} = 0, \quad (\overline{OC} - \overline{OD}) \cdot \overline{AB} = 0, \quad (\overline{OA} + \overline{OB}) \cdot \overline{AB} = 0.$$

Умножим первое из этих равенств на 2 и вычтем из него два других. Получим:

$$(2\overline{OH} - \overline{OA} - \overline{OB} - \overline{OC} - \overline{OD}) \cdot \overline{AB} = 0,$$

или  $\bar{x} \cdot \overline{AB} = 0$ , где  $\bar{x} = 2\overline{OH} - \overline{OA} - \overline{OB} - \overline{OC} - \overline{OD}$ .

Аналогично находим, что  $\bar{x} \cdot \overline{AC} = 0$ ,  $\bar{x} \cdot \overline{AD} = 0$ .

Так как векторы  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  и  $\overline{AD}$  не компланарны, то  $\bar{x} = \bar{0}$ , откуда следует, что

$$\overline{OH} = \frac{1}{2} (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}).$$

Переходим к доказательству обратной теоремы.

Пусть  $O$  — центр сферы, описанной около тетраэдра  $ABCD$ . Построим точку  $H$ , такую, что

$$\overline{OH} = \frac{1}{2} (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}).$$

Докажем, что если противоположные ребра тетраэдра попарно перпендикулярны, то его высоты пересекаются в точке  $H$ .

Действительно,

$$\overline{DH} = \overline{OH} - \overline{OD} = \frac{1}{2} (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} - \overline{OD}).$$

Учитывая, что  $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2$ , получаем

$$\overline{DH} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} - \overline{OD}) (\overline{OB} - \overline{OA}) = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{DC}.$$

Но  $\overline{AB} \cdot \overline{DC} = 0$ , поэтому  $\overline{DH} \cdot \overline{AB} = 0$ . Аналогично докажем, что  $\overline{DH} \times \overline{BC} = 0$ . Следовательно, прямая  $DH$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ . Точно так же докажем, что прямые  $AH$ ,  $BH$ , и  $CH$  перпендикулярны соответственно плоскостям  $BCD$ ,  $ACD$  и  $ABD$ . Значит,  $H$  — точка пересечения высот тетраэдра  $ABCD$ .

27. Решение 1. Пусть дан тетраэдр  $ABCD$ , противоположные ребра которого попарно перпендикулярны.

Если  $AD \perp DB$ , то по теореме о трех перпендикулярах  $AD \perp DC$ , то есть  $\angle ADC = 90^\circ$ . Аналогично докажем, что и  $\angle BDC = 90^\circ$ .

Пусть теперь  $\angle ADB > 90^\circ$ . Проведем высоту  $CN$  тетраэдра (рис. 13). Тогда  $N$  — ортоцентр треугольника  $ABD$  (см. задачу 25, с. 135). Пусть  $AA_1$  и  $BB_1$  — высоты треугольника  $ABD$ , тогда  $AB_1$  и  $BA_1$  — высоты треугольника  $ABN$ . Итак,  $AB_1 \perp BN$  и по теореме о трех перпендикулярах  $AB_1 \perp CB_1$ , то есть  $\angle CB_1D = 90^\circ$ . А так как  $\angle ADC$  внешний угол треугольника  $CB_1D$ , то  $\angle ADC > 90^\circ$ . Точно так же получим:  $\angle BDC > \angle CA_1D = 90^\circ$ .

Остается рассмотреть случай, когда угол  $ADB$  острый. Способом от противного легко доказать, что при этом углы  $BDC$  и  $CDA$  также острые. Таким образом, все плоские углы при вершине  $D$  тетраэдра  $ABCD$  одноименные. Аналогичное заключение можно сделать о плоских углах при любой другой вершине тетраэдра.

Решение 2. Согласно условию задачи  $AB \perp CD$ , поэтому

$$\overline{AB} \cdot \overline{DC} = 0,$$

или

$$(\overline{DB} - \overline{DA}) \cdot \overline{DC} = 0,$$

откуда

$$\overline{DA} \cdot \overline{DC} = \overline{DB} \cdot \overline{DC}.$$

Аналогично из равенства  $\overline{AC} \cdot \overline{DB} = 0$  следует, что

$$\overline{DA} \cdot \overline{DB} = \overline{DB} \cdot \overline{DC}.$$

Итак,

$$\overline{DA} \cdot \overline{DB} = \overline{DB} \cdot \overline{DC} = \overline{DC} \cdot \overline{DA} = S.$$

Если  $S > 0$ , то все плоские углы трехгранного угла  $D$  острые, если  $S = 0$ , то есть углы прямые, если  $S < 0$ , то все углы прямые.

Решение 3. Воспользуемся результатом задачи 23 (см. с. 152). Суммы квадратов длин противоположных ребер тетраэдра равны, то есть  $a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2$ ,

где

$$DA = a, DB = b, DC = c, BC = a_1, CA = b_1, AB = c_1.$$

Отсюда

$$a^2 + b^2 - c_1^2 = b^2 + c^2 - a_1^2, a^2 + c^2 - b_1^2 = b^2 + c^2 - a_1^2.$$

На основании теоремы косинусов приходим к выводу, что косинусы всех трех углов  $ADB$ ,  $BDC$ ,  $CDA$  имеют один и тот же знак или равны одновременно нулю, то есть все плоские углы при вершине  $D$  являются одноименными.

28. Решение 1. Отложим на ребрах трехгранного угла с вершиной  $O$  равные отрезки  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$ . Пусть  $L$ ,  $M$ ,  $N$  соответственно — середины отрезков  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Тогда  $OL$  — биссектриса угла  $BOC$  и  $OL \perp BC$ , а так как  $MN \parallel BC$ , то  $OL \perp MN$ . Аналогично  $OM$  и  $ON$  — биссектрисы углов  $COA$  и  $AOB$ ,  $OM \perp LN$  и  $ON \perp LM$ . Значит,  $OLMN$  — тетраэдр, противоположные ребра которого перпендикулярны. Остается воспользоваться результатом задачи 26 (см. с. 154).

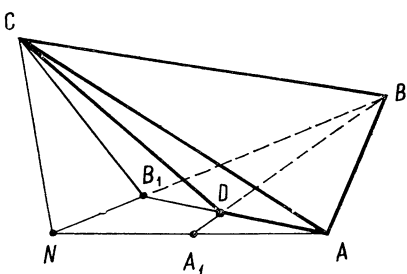


Рис. 13

Решение 2. Пусть  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  — единичные векторы, сонаправленные с ребрами  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  трехгранного угла. Тогда векторы  $\bar{a} + \bar{b}$ ,  $\bar{b} + \bar{c}$  и  $\bar{c} + \bar{a}$  сонаправлены с биссектрисами углов  $AOB$ ,  $BOC$  и  $COA$ . Легко проверить, что

$$(\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{c} + \bar{a}) = (\bar{c} + \bar{a}) \cdot (\bar{a} + \bar{b}).$$

Отсюда и вытекает доказываемое утверждение.

Решение 3. Композиция двух осевых симметрий с пересекающимися перпендикулярными осями есть осевая симметрия, ось которой проходит через точку пересечения двух осей перпендикулярно к ним. Если в качестве этих осей взять прямые, содержащие рассматриваемые биссектрисы плоских углов трехгранного угла, то композиция двух осевых симметрий отображает одно из ребер на другое. Тогда прямая, содержащая биссектрису угла между этими ребрами, и есть ось симметрии композиции, поэтому она перпендикулярна каждой из первых двух осей.

29. Решение 1. Докажем, что диагональ  $AC_1$  перпендикулярна сечению  $A_1BD$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Так как  $ABCD$  — квадрат, то  $AC \perp BD$  и по теореме о трех перпендикулярах  $AC_1 \perp BD$ . Точно так же докажем, что  $AC_1 \perp A_1B$ . Значит, по теореме о двух перпендикулярах диагональ  $AC_1$  куба перпендикулярна плоскости  $A_1BD$ .

Решение 2. Пусть  $\overline{AB} = \bar{a}$ ,  $\overline{AD} = \bar{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \bar{c}$ . Тогда

$$\overline{AC_1} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}, \quad \overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = \bar{b} - \bar{a}.$$

А так как  $\bar{a} \cdot \bar{c} = \bar{b} \cdot \bar{c} = 0$  и  $\bar{a}^2 = \bar{b}^2$ , то

$$\overline{AC_1} \cdot \overline{BD} = (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{b} - \bar{a}) = 0.$$

Значит,  $AC_1 \perp BD$ .

Аналогично докажем, что  $AC_1 \perp A_1B$ .

Решение 3. Введем в пространстве прямоугольную систему координат:  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(1; 0; 0)$ ,  $D(0; 1; 0)$ ,  $A_1(0; 0; 1)$ . Так как плоскость  $A_1BD$  отсекает на осях координат единичные отрезки, то ее уравнение имеет вид

$$x + y + z = 1.$$

Значит,  $\overline{AC_1} = (1, 1, 1)$  — нормальный вектор этой плоскости.

30. Решение 1. Пусть данная плоскость пересекает прямые  $AB_1$ ,  $BC_1$ ,  $CD_1$ ,  $DA_1$  соответственно в точках  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ . Установите, что проекции этих точек на плоскость  $ABC$  являются вершинами квадрата.

Решение 2. Заметив, что  $\frac{\overline{AK}}{\overline{KB_1}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{LC_1}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{MD_1}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{NA_1}} = \lambda$  выведите соотношение

$$\overline{KL} = \frac{\overline{AB} + \lambda \overline{B_1C_1}}{1 + \lambda}.$$

Затем убедитесь, что  $KL = LM = MN = NK$  и  $\overline{KL} \cdot \overline{LM} = 0$ .

Решение 3. Примените поворот на  $90^\circ$  вокруг оси, проходящей через центры  $O$  и  $O_1$  граней  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  куба.

31. Решение 1. Пусть все диагонали параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равны. Тогда каждое диагональное сечение параллелепипеда является прямоугольником. Следовательно,  $AA_1 \perp AC$ . Кроме того,  $AA_1 \perp BD$ , так как  $AA_1 \parallel BB_1$  и  $BB_1 \perp BD$ . Согласно теореме о двух перпендикулярах прямая  $AA_1$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ . Аналогично докажем, что прямая  $AB$  перпендикулярна плоскости  $AA_1D$ .

Решение 2. Так как диагональные сечения  $ACC_1A_1$  и  $BDD_1B_1$  — прямоугольники, то прямоугольные треугольники  $ACA_1$  и  $BDD_1$  равны (по гипотенузе и катету). Значит,  $AC = BD$ , поэтому грань  $ABCD$  параллелепипеда является прямоугольником. Точно так же докажем, что и другие грани параллелепипеда являются прямоугольниками.

Решение 3. Пусть  $\overline{DA} = \bar{a}$ ,  $\overline{DC} = \bar{b}$  и  $\overline{DD_1} = \bar{c}$ . Тогда

$$\overline{DB_1} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}, \quad \overline{D_1B} = \bar{a} + \bar{b} - \bar{c}.$$

А так как  $DB_1 = D_1B$ , то  $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})^2 = (\bar{a} + \bar{b} - \bar{c})^2$ , или

$$\bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c} = 0.$$

Аналогично получим еще два равенства:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} = 0, \quad \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c} = 0.$$

Откуда следует, что  $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} = 0$ , то есть  $\angle ADC = \angle ADD_1 = \angle CDD_1 = 90^\circ$ .

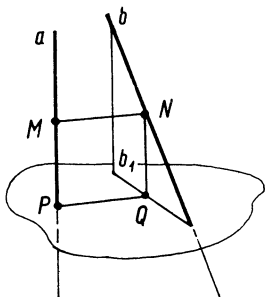


Рис. 14

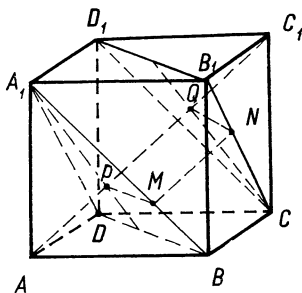


Рис. 15

### Задачи на построение

32. Решение 1. Проведем через прямую  $b$  плоскость  $\alpha$ , параллельную прямой  $a$ . Выберем на прямой  $a$  две точки  $A$  и  $B$  и проведем перпендикуляры  $AA_1$  и  $BB_1$  к плоскости  $\alpha$ . Прямая  $A_1B_1$ , параллельная прямой  $a$ , пересечет прямую  $b$  в некоторой точке  $N$ . Из точки  $N$  проведем перпендикуляр  $MN$  к прямой  $a$ . Остается доказать, что прямая  $MN$  перпендикулярна  $b$ .

Решение 2. Построим плоскость  $\alpha$ , перпендикулярную прямой  $a$  и пересекающую ее в точке  $P$  (рис. 14). Пусть  $b_1$  — проекция прямой  $b$  на плоскость  $\alpha$ . Проведем перпендикуляр  $PQ$  к прямой  $b_1$ . Тогда  $Q$  — проекция некоторой точки  $N$  прямой  $b$  на плоскость  $\alpha$ . Перпендикуляр  $MN$  к прямой  $a$  есть общий перпендикуляр прямых  $a$  и  $b$ .

33. Решение 1. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Требуется построить общий перпендикуляр к прямым  $A_1 B$  и  $B_1 C$  (рис. 15).

Плоскости  $A_1 B D$  и  $C B_1 D_1$  параллельны (так как  $A_1 B \parallel D_1 C$  и  $A_1 D \parallel B_1 C$ ), а диагональ  $AC$  куба пересекает их в точках  $P$  и  $Q$ , которые являются центрами треугольников  $A_1 B D$  и  $C B_1 D_1$  (см. задачу 1, с. 125). Согласно задаче 29 (см. с. 156) отрезок  $PQ$  перпендикулярен каждой из плоскостей  $A_1 B D$  и  $C B_1 D_1$ , значит, он перпендикулярен и к прямым  $A_1 B$  и  $B_1 C$ , а его длина равна кратчайшему расстоянию между этими прямыми.

Построим на отрезках  $A_1 B$  и  $B_1 C$  точки  $M$  и  $N$  такие, что  $BM = \frac{1}{3} BA_1$  и  $B_1 N = \frac{1}{3} B_1 C$ . Тогда  $MNQP$  — прямоугольник и  $MN$  — общий перпендикуляр к прямым  $A_1 B$  и  $B_1 C$ .

Решение 2. Пусть  $MN$  — искомый отрезок. Положим  $\overline{BA} = \bar{a}$ ,  $\overline{BC} = \bar{b}$ ,  $\overline{BB_1} = \bar{c}$ . Тогда имеем:

$$\overline{BA_1} = \bar{a} + \bar{c}, \quad \overline{CB_1} = \bar{c} - \bar{b}, \quad \overline{BM} = x(\bar{a} + \bar{c}), \quad \overline{CN} = y(\bar{c} - \bar{b}),$$

где  $x$  и  $y$  — неизвестные числа.

Значит,

$$\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN} = -x\bar{a} + (1-y)\bar{b} + (y-x)\bar{c}.$$

Но  $\overline{MN} \cdot \overline{BA_1} = 0$ ,  $\overline{MN} \cdot \overline{CB_1} = 0$ ,  $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{c} \cdot \bar{a} = 0$  и  $\bar{a}^2 = \bar{b}^2 = \bar{c}^2$ .  
Учитывая это, получаем:

$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x - 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = \frac{2}{3}$ .

**34. Решение 1.** Пусть плоскость, проходящая через диагональ  $BD_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , пересекает его ребро  $AA_1$  в точке  $M$ , а ребро  $CC_1$  — в точке  $N$ . Тогда  $BMD_1 N$  — параллелограмм. Проведем  $MK \perp BD_1$ . Площадь сечения  $S = BD_1 \cdot MK$ .

Значит, задача сводится к построению общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым  $AA_1$  и  $BD_1$ .

Обозначим  $AB = 1$ ,  $AM = x$ ,  $BK = y$ ,  $MK = h$ . Тогда  $D_1 K = \sqrt{3} - y$ , и по теореме Пифагора находим, что

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+1), \quad h^2 = \frac{2}{3} \left( \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right).$$

Отсюда следует, что  $h$  принимает наименьшее значение при  $x = \frac{1}{2}$ , то есть когда  $M$  — середина ребра  $AA_1$ .

**Решение 2.** Построим общий перпендикуляр  $MK$  скрещивающихся прямых  $AA_1$  и  $BD_1$ , пользуясь вторым способом решения задачи 32. В плоскости  $ABD$  проведем перпендикуляр  $AO$  к прямой  $BD$ . Так как  $AB = AD$ , то точка  $O$  — середина отрезка  $BD$ , а значит, она является проекцией середины  $K$  диагонали  $BD_1$ . Поэтому искомая точка  $M$  — середина ребра  $AA_1$ .

**35. Решение 1.** Пусть прямая  $A_1 B_1$  построена. Обозначим  $\angle BAA_1 = \alpha$ ,  $\angle ABB_1 = \beta$ ,  $AB = m$ ,  $AB_1 = p$ ,  $A_1 B = q$ ,  $AA_1 = BB_1 = x$ . Из треугольников  $ABA_1$  и  $ABB_1$  по теореме косинусов находим:

$$q^2 = m^2 + x^2 - 2mx \cos \alpha, \quad p^2 = m^2 + x^2 - 2mx \cos \beta.$$

А так как прямые  $AB$  и  $A_1 B_1$  перпендикулярны, то, используя результат задачи 23 (см. с. 152), получаем:

$$p^2 + q^2 = 2x^2.$$

Подставив в это равенство значения  $p$  и  $q$ , будем иметь

$$(\cos \alpha + \cos \beta)x = m.$$

Значит, если  $\cos \alpha + \cos \beta \neq 0$ , то есть  $\alpha + \beta \neq 180^\circ$ , задача имеет единственное решение:

$$x = \frac{m}{\cos \alpha + \cos \beta}.$$

Если же  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , задача решений не имеет.

**Решение 2.** Формулу для построения искомого отрезка  $AA_1$  можно получить проще, если применить скалярное умножение векторов.

Имеем:

$$\overline{A_1 B_1} = \overline{A_1 A} + \overline{AB} + \overline{BB_1}.$$

Умножив обе части этого равенства скалярно на вектор  $\overline{AB}$ , получим

$$(\cos \alpha + \cos \beta)x - m = 0,$$

откуда

$$x = \frac{m}{\cos \alpha + \cos \beta}, \text{ если } \alpha + \beta \neq 180^\circ.$$

**Решение 3.** Пусть  $d$  — искомая прямая и  $MN$  — общий перпендикуляр прямых  $c$  и  $d$  (точка  $M$  принадлежит прямой  $c$ ). По теореме о двух перпендикулярах прямая  $AB$  перпендикулярна к плоскости  $MA_1B_1$ , поэтому она перпендикулярна прямым  $MA_1$  и  $MB_1$ . Обозначив  $\angle BAA_1 = \alpha$  и  $\angle ABB_1 = \beta$ , найдем, что

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}.$$

Таким образом, точку  $M$  можно построить. Затем следует через точку  $M$  провести плоскость перпендикулярно прямой  $AB$ , которая пересечет данные прямые  $a$  и  $b$  в искомых точках  $A_1$  и  $B_1$ .

Построение невозможно, если  $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = -1$ , то есть  $\alpha + \beta = 180^\circ$ . Если  $\beta = 90^\circ$ , но  $\alpha \neq 90^\circ$ , то точка  $M$  совпадает с точкой  $B$ .

#### § 4. Вычисление расстояний и углов

**36. Решение 1.** Пусть  $E$  — середина ребра  $BC$  тетраэдра  $ABCD$ . Обозначим  $AE = m_1$ ,  $DE = m_2$  и  $\angle DAE = \alpha$ . Так как  $AM = \frac{2}{3} m_1$ , то, применив теорему косинусов к треугольникам  $ADM$  и  $ADE$ , получим:

$$DM^2 = a^2 + \frac{4}{9} m_1^2 - \frac{4}{3} am_1 \cos \alpha, \quad m_2^2 = a^2 + m_1^2 - 2am_1 \cos \alpha.$$

Отсюда

$$DM^2 = \frac{1}{3} a^2 - \frac{2}{9} m_1^2 + \frac{2}{3} m_2^2.$$

По формуле задачи 87 (см. с. 42) находим:

$$m_1^2 = \frac{b_1^2 + c_1^2}{2} - \frac{a_1^2}{4}, \quad m_2^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

Следовательно,

$$DM^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{9}.$$

**Решение 2.** Для точки  $M$  имеет место равенство

$$\overline{DM} = \frac{1}{3} (\overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC}).$$

Отсюда

$$DM^2 = \frac{1}{9} (a^2 + b^2 + c^2 + 2\overline{DA} \cdot \overline{DB} + 2\overline{DA} \cdot \overline{DC} + 2\overline{DB} \cdot \overline{DC}).$$

Из равенства

$$AB^2 = DA^2 + DB^2 - 2\overline{DA} \cdot \overline{DB}$$

следует, что

$$2\overline{DA} \cdot \overline{DB} = a^2 + b^2 - c_1^2.$$



Аналогично

$$2\overline{DA} \cdot \overline{DC} = a^2 + c^2 - b_1^2, \quad 2\overline{DB} \cdot \overline{DC} = b^2 + c^2 - a_1^2.$$

Следовательно,

$$DM^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{9}.$$

**Решение 3.** Построим тетраэдр  $ABCD$  до параллелепипеда с ребрами  $DA, DB, DC$  и обозначим его диагонали через  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$ . Согласно задаче 1 (см. с. 138) медиана  $DM$  тетраэдра равна  $\frac{1}{3}$  диагонали  $DD_1$ .

Для параллелепипеда имеет место соотношение

$$DD_1^2 = DA_1^2 + DB_1^2 + DC_1^2 - DA^2 - DB^2 - DC^2.$$

Если положить:  $\overline{DA} = \bar{a}$ ,  $\overline{DB} = \bar{b}$ ,  $\overline{DC} = \bar{c}$ , то доказательство сводится к проверке истинности равенства

$$(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})^2 = (\bar{a} + \bar{b})^2 + (\bar{b} + \bar{c})^2 + (\bar{c} + \bar{a})^2 - a^2 - b^2 - c^2.$$

На основании теоремы о диагоналях параллелограмма имеем:

$$DA_1^2 + BC^2 = 2DB^2 + 2DC^2,$$

откуда

$$DA_1^2 = 2(b^2 + c^2) - a_1^2.$$

Аналогично

$$DB_1^2 = 2(a^2 + c^2) - b_1^2, \quad DC_1^2 = 2(a^2 + b^2) - c_1^2.$$

После соответствующей подстановки получаем:

$$9DM^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2.$$

37.  $MN^2 = \frac{1}{4}(a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2)$ , где  $M$  и  $N$  — середины ребер  $AB$  и  $CD$ .

**Решение 1.** Середину  $N$  ребра  $CD$  тетраэдра соедините с вершинами  $A$  и  $B$ . Примените формулу, выражающую длину медианы треугольника через длины его сторон.

**Решение 2.** Согласно задаче 4:

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}).$$

Возведите обе части этого равенства в квадрат и воспользуйтесь соотношением

$$2\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC^2} + \overline{BD^2} - \overline{AB^2} - \overline{CD^2}.$$

$$38. \cos \varphi = \frac{b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2}{2aa_1}, \text{ где } \varphi = \angle(\overline{AD}, \overline{BC}).$$

**Решение 1.** Пусть  $M$  и  $N$  — середины ребер  $AB$  и  $CD$  тетраэдра. Середину  $L$  ребра  $AC$  соедините с точками  $M$  и  $N$ . Тогда  $LM = \frac{1}{2}BC$ ,  $LN = \frac{1}{2}AD$ ,  $\angle MLN = \angle(\overline{AD}, \overline{BC})$ . Длину отрезка  $MN$  выразите по формуле задачи 37 и примените к треугольнику  $LMN$  теорему косинусов.

Р е ш е н и е 2. Воспользуйтесь соотношением

$$\cos \angle (\overline{AD}, \overline{BC}) = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{AD \cdot BC}.$$

Так как

$$2\overline{AD} \cdot \overline{AC} = AC^2 + AD^2 - CD^2, \quad 2\overline{AD} \cdot \overline{AB} = AB^2 + AD^2 - BD^2,$$

то

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AD} \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}) = \frac{1}{2} (BD^2 + AC^2 - CD^2 - AB^2).$$

Р е ш е н и е 3. Воспользуйтесь векторным равенством

$$2\overline{AD} \cdot \overline{BC} = AC^2 + BD^2 - AB^2 - CD^2.$$

$$39. \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Р е ш е н и е 1. Центр  $O$  сферы, описанной около тетраэдра  $ABCD$ , принадлежит перпендикуляру к плоскости  $ABD$ , проходящему через середину  $M$  ребра  $AB$ . Заметив, что  $OM = \frac{1}{2} CD$  и  $DM = \frac{1}{2} AB$ , найдите  $OD$  по теореме Пифагора.

Р е ш е н и е 2. Постройте прямоугольный параллелепипед с ребрами  $DA, DB, DC$ . Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелепипеда есть центр сферы, описанной около тетраэдра  $ABCD$ , а радиус сферы равен половине диагонали параллелепипеда.

Р е ш е н и е 3. Введите прямоугольную систему координат:  $D(0; 0; 0)$ ,  $A(a; 0; 0)$ ,  $B(0; b; 0)$ ,  $C(0; 0; c)$ . Обозначьте координаты центра  $O$  сферы через  $x, y, z$  и воспользуйтесь формулой расстояния между двумя точками.

$$40. \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Р е ш е н и е 1. Установите, что прямые, проходящие через середины противоположных ребер данного тетраэдра, являются его осями симметрии, а центр описанной сферы есть точка их пересечения, то есть центроид тетраэдра.

Согласно задаче 2 (см. с. 138) центроид тетраэдра делит каждую медиану в отношении 3 : 1, считая от вершины тетраэдра. Используя это, а также результат задачи 36 (см. с. 159), вычислите радиус описанной сферы.

Р е ш е н и е 2. Постройте отрезок  $MN$ , соединяющий середины ребер  $AB$  и  $CD$ . Установите, что  $AN = BN$  и  $CM = DM$ . Следовательно,  $MN$  есть общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым  $AB$  и  $CD$ , а середина  $O$  отрезка  $MN$  является центром сферы, описанной около тетраэдра  $ABCD$ .

Вычислите длину медианы  $AN$  треугольника  $ACD$  и по теореме Пифагора найдите, что

$$MN = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}.$$

Затем из прямоугольного треугольника  $AMO$  вычислите  $AO$ .

Р е ш е н и е 3. Около всякого тетраэдра можно описать параллелепипед так, чтобы ребра тетраэдра были диагоналями граней параллелепипеда. Так как противоположные ребра тетраэдра  $ABCD$  равны, то описанный параллелепипед будет прямоугольным. Диагональ прямоугольного параллелепипеда является диаметром описанной около него сферы, следовательно, и сферы, описанной около тетраэдра. Значит, если  $x, y, z$  — измерения прямоугольного параллелепипеда и  $R$  — радиус сферы, то

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

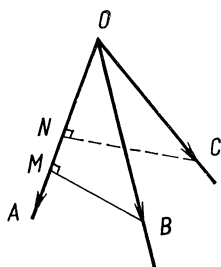


Рис. 16

Далее примените теорему Пифагора и докажете, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2).$$

**41. Решение 1.** Пусть  $A, B, C$  — двугранные углы трехгранного угла с вершиной  $O$ , противолежащие соответственно плоским углам  $\alpha, \beta, \gamma$ . Отложим на ребре  $OA$  отрезок  $OL = 1$  и проведем через точку  $L$  плоскость, перпендикулярную к ребру  $OA$ . Если  $\beta < 90^\circ$  и  $\gamma < 90^\circ$ , то эта плоскость пересечет ребра  $OB$  и  $OC$  соответственно в некоторых точках  $M$  и  $N$ . Тогда  $NLM$  — линейный угол двугранного угла  $OA$ . По теореме косинусов из треугольников  $LMN$  и  $OMN$  находим:

$$MN^2 = LM^2 + LN^2 - 2LM \cdot LN \cos A,$$

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cos \alpha.$$

Приравняем полученные два выражения для  $MN^2$ . Учитывая, что  $OM^2 - LM^2 = 1$  и  $ON^2 - LN^2 = 1$ , получим:

$$LM \cdot LN \cos A = OM \cdot ON \cos \alpha - 1.$$

Отсюда

$$\frac{LM \cdot LN}{OM \cdot ON} \cos A = \cos \alpha - \frac{1}{OM \cdot ON},$$

или

$$\sin \beta \sin \gamma \cos A = \cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma.$$

Итак,

$$\cos A = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

Остается еще убедиться, что полученная формула верна и тогда, когда один из углов  $AOC$  и  $AOB$  тупой, а другой острый, оба угла тупые и хотя бы один из них прямой.

**Решение 2.** Отложим на ребрах трехгранного угла от его вершины единичные векторы  $\vec{OA} = \vec{e}_1$ ,  $\vec{OB} = \vec{e}_2$ ,  $\vec{OC} = \vec{e}_3$ . Пусть  $\angle BOC = \alpha$ ,  $\angle COA = \beta$ ,  $\angle AOB = \gamma$  (рис. 16). Величины двугранных углов обозначим через  $A, B, C$ . Проведем отрезки  $BM$  и  $CN$  перпендикулярно к прямой  $OA$ , тогда  $\angle(\vec{MB}, \vec{NC}) = \angle A$ ,  $\vec{OM} = \vec{e}_1 \cos \gamma$ ,  $\vec{ON} = \vec{e}_1 \cos \beta$ .

По правилу сложения векторов

$$\vec{e}_2 = \vec{OM} + \vec{MB}, \quad \vec{e}_3 = \vec{ON} + \vec{NC}.$$

Перемножим скалярно эти равенства. Учитывая, что  $\vec{MB} \perp \vec{e}_1$  и  $\vec{NC} \perp \vec{e}_1$ , получим:

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \cos \beta \cos \gamma + \vec{MB} \cdot \vec{NC},$$

или

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A.$$

**Решение 3.** Имеем:

$$\vec{MB} = \vec{MO} + \vec{e}_2, \quad \vec{NC} = \vec{NQ} + \vec{e}_3.$$

Заметив, что  $\vec{MO} \cdot \vec{e}_3 = \vec{NO} \cdot \vec{e}_2 = -\cos \beta \cos \gamma$ , перемножим эти два равенства скалярно. Получим:

$$\sin \beta \sin \gamma \cos A = \cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma.$$

**Решение 4.** По правилу сложения векторов

$$\vec{BC} = \vec{BM} + \vec{MN} + \vec{NC}.$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат, получим:

$$BC^2 = BM^2 + MN^2 + CN^2 + 2\overline{BM} \cdot \overline{NC}$$

(ведь  $\overline{BM} \cdot \overline{MN} = \overline{CN} \cdot \overline{MN} = 0$ ).

Но

$$BC^2 = 2 - 2 \cos \alpha, \quad BM^2 = \sin^2 \gamma, \quad CN^2 = \sin^2 \beta,$$

$$\overline{MB} \cdot \overline{NC} = \sin \beta \sin \gamma \cos A, \quad MN^2 = (ON - OM)^2 = (\cos \beta - \cos \gamma)^2.$$

Следовательно,

$$2 - 2 \cos \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \beta \cos \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos A.$$

После очевидных упрощений получаем:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A.$$

**42. Решение 1.** Пусть прямая  $a$  пересекает данную плоскость в точке  $O$ . Возьмем на прямой  $a$  точку  $A$ , отличную от точки  $O$ , и проведем перпендикуляр  $AC$  к плоскости, затем в плоскости проведем перпендикуляр  $CB$  к прямой  $b$ . Тогда  $AB \perp OB$  по теореме о трех перпендикулярах. Из прямоугольных треугольников  $AOC$  и  $COB$  находим:

$$\frac{OC}{OA} = \cos \alpha, \quad \frac{OB}{OC} = \cos \beta.$$

Перемножим эти равенства почленно и, учитывая, что  $\frac{OB}{OA} = \cos \varphi$ , получим:

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cos \beta.$$

**Решение 2.** Пусть  $A$  — произвольная точка прямой  $a$ , отличная от  $O$ ,  $AC$  — перпендикуляр к плоскости,  $OC$  — проекция прямой  $a$  на плоскость и  $\vec{e}$  — единичный вектор прямой  $b$ , образующий с лучом  $OC$  угол  $\varphi$ . Имеем:

$$\overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CA}.$$

Обе части этого равенства умножим на  $\vec{e}$ . Учитывая, что  $\overline{AC} \cdot \vec{e} = 0$  и  $\frac{OC}{OA} = \cos \alpha$ , получим:

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cos \beta,$$

**Решение 3.** Двугранный угол, противолежащий искомому плоскому углу  $\varphi$ , прямой. Следовательно, по теореме косинусов для трехгранного угла сразу получаем доказываемое соотношение.

**43. Решение 1.** Пусть  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — данный параллелепипед,  $\angle A_1 B A = \alpha$ ,  $\angle B_1 C B = \beta$  (рис. 17). Так как  $A_1 D \parallel B_1 C$ , то угол  $DA_1 B$  есть угол  $\gamma$  между скрещивающимися прямыми  $A_1 B$  и  $B_1 C$ .

Обозначим  $AB = a$ ,  $AD = b$ ,  $AA_1 = c$ . Тогда  $BD^2 = a^2 + b^2$ ,  $A_1 B^2 = a^2 + c^2$ ,  $A_1 D^2 = b^2 + c^2$ . Применив теорему косинусов к треугольнику  $A_1 B D$ , получим:

$$a^2 + b^2 = (a^2 + c^2) + (b^2 + c^2) - 2 A_1 B \times \\ \times A_1 D \cos \gamma,$$

откуда

$$\cos \gamma = \frac{AA_1^2}{A_1 B \cdot A_1 D},$$

или

$$\cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta.$$

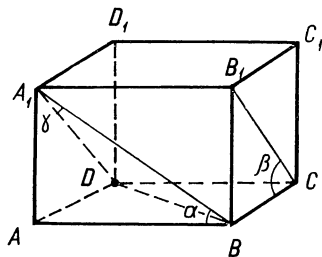


Рис. 17

Решение 2. Прямая  $A_1B$  образует с плоскостью  $ADA_1$  угол  $90^\circ - \alpha$ , а ее проекция  $AA_1$  на эту плоскость — с прямой  $A_1D$  угол  $90^\circ - \beta$ . Учитывая, что  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  и  $\cos(90^\circ - \beta) = \sin \beta$ , по формуле задачи 42 получим:

$$\cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta.$$

Решение 3. Пусть  $\overline{AB} = \bar{a}$ ,  $\overline{AD} = \bar{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \bar{c}$ . Тогда

$$\overline{A_1B} = \bar{a} - \bar{c}, \quad \overline{B_1C} = \bar{b} - \bar{c}, \quad \overline{A_1B} \cdot \overline{B_1C} = \bar{c}^2.$$

Поэтому

$$\cos \gamma = \frac{\overline{A_1B} \cdot \overline{B_1C}}{\overline{A_1B} \cdot \overline{B_1C}} = \frac{AA_1^2}{A_1B \cdot B_1C},$$

или

$$\cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta.$$

$$44. \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3} \cos \beta.$$

Решение 1. Пусть  $NABC$  — правильная треугольная пирамида,  $NO$  — ее высота,  $M$  — середина ребра  $AB$ . Тогда  $\angle OMN$  — линейный угол двугранного угла  $AB$ . Согласно условию задачи  $\angle ANB = \alpha$  и  $\angle OMN = \beta$ .

Треугольники  $AMN$  и  $OMN$  имеют общую сторону  $MN$ , а их катеты удовлетворяют соотношению

$$\frac{AM}{OM} = \operatorname{tg} 60^\circ.$$

Заметив, что  $AM = MN \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  и  $OM = MN \cos \beta$ , получим:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3} \cos \beta.$$

Решение 2. Площадь основания пирамиды и площадь ее боковой поверхности связаны зависимостью

$$S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos \beta}.$$

Обозначим  $AB = a$  и  $NA = b$ , тогда

$$S_{\text{осн.}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \quad S_{\text{бок}} = \frac{3}{2} b^2 \sin \alpha.$$

Следовательно,

$$\frac{a^2}{2 \sqrt{3} b^2 \sin \alpha} = \cos \beta.$$

Из треугольника  $AMN$  находим, что

$$\frac{a}{2b} = \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Подставив значение  $\frac{a}{b}$  в предыдущее равенство, получим.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3} \cos \beta.$$

Решение 3. Плоские углы при вершине  $A$  пирамиды  $NABC$  равны  $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ ,  $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$  и  $60^\circ$ . По теореме косинусов для трехгранного угла находим

$$\cos \beta = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2}},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3} \cos \beta.$$

$$45. \cos \gamma = 2 \cos \alpha - 1.$$

Решение 1. Пусть  $NABCD$  — правильная четырехугольная пирамида и  $NO$  — ее высота. Тогда  $O$  — центр квадрата  $ABCD$ .

Положим  $NB = 1$ . Из равнобедренных треугольников  $NBC$  и  $NBD$  имеем:

$$BC = 2 \sin \frac{\alpha}{2}, \quad BD = 2 \sin \frac{\gamma}{2}.$$

А так как  $BD = BC \sqrt{2}$ , то

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Решение 2. Основанием пирамиды служит квадрат  $ABCD$ , поэтому  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0$ , или

$$(\overline{NB} - \overline{NA}) \cdot (\overline{NC} - \overline{NB}) = 0.$$

Пусть  $NA = 1$ . Тогда

$$\overline{NA} \cdot \overline{NB} = \overline{NB} \cdot \overline{NC} = \cos \alpha, \quad \overline{NA} \cdot \overline{NC} = \cos \gamma, \quad \overline{NE}^2 = 1.$$

Учитывая это, получим

$$\cos \gamma = 2 \cos \alpha - 1.$$

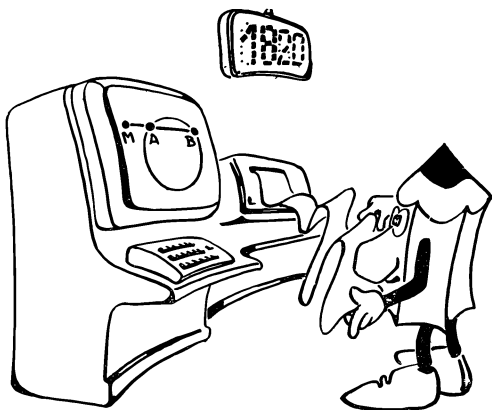
Нетрудно показать, что формулы, полученные при решении задачи первым и вторым способами, равносильны.

Решение 3. Рассмотрим трехгранный угол  $NAOB$ . Так как  $\angle ANO = \angle BNO = \frac{\gamma}{2}$ ,  $\angle ANB = \alpha$  и двугранный угол  $NO$  — прямой, то, используя результат задачи 42 (см. с. 163) получим:

$$\cos^2 \frac{\gamma}{2} = \cos \alpha,$$

или

$$\cos \gamma = 2 \cos \alpha - 1.$$



## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

### Планиметрия

#### Задачи на доказательство

1. В окружность вписан прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . Касательная к окружности в точке  $C$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $N$ . Докажите, что если  $M$  — проекция вершины  $C$  на прямую  $AB$ , то

$$AM : MB = AN : NB.$$

2. (Задача Архимеда<sup>1</sup>.) В окружность вписан треугольник  $ABC$ . Докажите, что если  $AC < BC$  и  $N$  — основание перпендикуляра, проведенного из середины  $M$  дуги  $ABC$  к стороне  $BC$ , то

$$AC + CN = NB.$$

3. Докажите, что если две биссектрисы треугольника равны, то треугольник — равнобедренный.

4. Окружность с центром  $O$  на стороне  $AB$  четырехугольника  $ABCD$  касается трех сторон. Сумма противоположных углов четырехугольника равна  $180^\circ$ . Докажите, что

$$AD + BC = AB.$$

5. К окружности радиуса  $R$  проведены две касательные  $a$  и  $b$  через концы диаметра  $AB$ . Произвольная третья касательная  $c$  пересекает  $a$  и  $b$  соответственно в точках  $A_1$  и  $B_1$ . Докажите, что

$$AA_1 \cdot BB_1 = R^2.$$

6. Две прямые, проходящие через вершину  $C$  равностороннего треугольника  $ABC$ , делят полуокружность, построенную на стороне  $AB$ , как на диаметре (вне треугольника), на три равные дуги.

<sup>1</sup> Архимед (287 — 212 до н. э.) — древнегреческий математик, физик и механик.

Докажите, что эти прямые делят саму сторону  $AB$  на три равных отрезка.

7. Дан треугольник  $ABC$ , в котором  $\angle A = \angle B = 40^\circ$ . Проведена биссектриса  $AD$  треугольника. Докажите, что

$$AD + CD = AB.$$

8. Докажите, что если в равнобедренном треугольнике  $ABC$  угол при вершине  $C$  равен  $100^\circ$ , то стороны треугольника связаны зависимостью:

$$a^3 + c^3 = 3a^2c.$$

9. В окружность радиуса  $R$  вписан правильный десятиугольник  $A_1A_2\dots A_{10}$ . Докажите, что

$$A_1A_4 - A_1A_2 = R.$$

10. На сторонах треугольника  $ABC$  вне его построены равно-сторонние треугольники  $BCA_0$ ,  $CAB_0$  и  $ABC_0$ . Докажите, что центры этих треугольников и центры тяжести треугольников  $B_0C_0A$ ,  $C_0A_0B$  и  $A_0B_0C$  являются вершинами правильного шестиугольника.

11. (Теорема Морлея<sup>1</sup>.) Докажите, что три точки пересечения смежных *трисектрис* внутренних углов произвольного треугольника являются вершинами равностороннего треугольника. (Трисектрисами угла называют прямые, проходящие через вершину угла и делящие его на три равные части.)

### Задачи на вычисление

12. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник  $ABC$ . Прямая, проведенная через вершину  $C$  прямого угла перпендикулярно медиане  $BD$ , пересекает гипотенузу в точке  $M$ . Найдите отношение  $\frac{AM}{MB}$ .

13. На гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  вне его построен квадрат. Найдите расстояние от вершины  $C$  до центра  $O$  квадрата, если катеты треугольника равны  $a$  и  $b$ .

14. Угол при вершине  $C$  равнобедренного треугольника  $ABC$  равен  $20^\circ$ . На боковых сторонах  $AC$  и  $BC$  взяты соответственно точки  $D$  и  $E$  так, что  $\angle ABD = 60^\circ$  и  $\angle BAE = 50^\circ$ . Найдите  $\angle BDE$ .

15. Угол при вершине  $C$  равнобедренного треугольника  $ABC$  равен  $20^\circ$ . На стороне  $BC$  взята точка  $D$  такая, что  $CD = AB$ . Найдите  $\angle BAD$ .

16. В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $CM$ . Определите вид треугольника, если  $\angle A + \angle MCB = 90^\circ$ .

17. Медианы треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Найдите  $\angle AMB$ , если  $\angle C = 15^\circ$  и  $c = h_c$ .

---

<sup>1</sup> Морлей Френк (1860—1937) — американский математик.



## Задачи на построение

18. Постройте параллелограмм, если даны периметр и высоты, проведенные к смежным сторонам.

19. Постройте прямую, параллельную стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  и пересекающую его стороны  $AC$  и  $BC$  соответственно в точках  $D$  и  $E$  таких, что  $AD = CE$ .

20. Даны отрезки длиной  $a$  и  $b$ . Постройте отрезок длиной  $x = \sqrt{ab}$ .

21. Через данную точку, лежащую вне данной окружности, проведите к окружности касательную.

22. Через точку  $M$ , лежащую вне окружности, проведите прямую, пересекающую окружность в точках  $A$  и  $B$  так, чтобы точка  $A$  была серединой отрезка  $MB$ .

23. В данную окружность впишите равнобедренный треугольник, высота которого равна его основанию.

24. Даны окружность и касательная к ней. Постройте квадрат  $ABCD$  так, чтобы вершины  $A$  и  $B$  принадлежали касательной, а вершины  $C$  и  $D$  — окружности.

25. Постройте равнобедренный треугольник по его высоте и периметру.

26. Дан квадрат  $ABCD$ . Постройте окружность, которая касается сторон  $AB$  и  $BC$  квадрата и проходит через точку  $D$ .

27. Из концов отрезка  $AB$  радиусом  $AB$  проведены дуги, пересекающиеся в точке  $C$ . В криволинейный треугольник  $ABC$  впишите окружность.

28. Даны окружность с центром  $O$  и точка  $P$  вне ее. На отрезке  $OP$  постройте точку  $M$  так, чтобы отрезок  $AM$  касательной ( $A$  — точка касания) равнялся отрезку  $MP$ .

29. Постройте равносторонний треугольник  $ABC$  так, чтобы его вершины лежали на трех данных параллельных прямых  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

30. Постройте треугольник  $ABC$ , угол  $A$  которого вдвое больше угла  $B$ , если даны стороны  $AC$  и  $BC$ .

31. Постройте треугольник  $ABC$ , разность углов  $A$  и  $B$  которого равна  $90^\circ$ , если даны стороны  $AC$  и  $BC$ .

32. Постройте треугольник  $ABC$ , разность углов  $A$  и  $B$  которого равна  $90^\circ$ , если даны сторона  $AB$  и высота  $CH$ .

## Стереометрия

### Задачи на доказательство

33. В пространстве даны две скрещивающиеся прямые. Из точек  $A$  и  $B$  одной прямой проведены перпендикуляры  $AA_1$  и  $BB_1$  к другой. Докажите, что если  $AA_1 = BB_1$ , то  $A_1AB = ABB_1$ .

34. Докажите, что сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего плоского угла, а сумма всех трех меньше  $360^\circ$ .

35. Проведены биссектрисы  $l_1, l_2, l_3$  плоских углов трехгранного угла. Докажите, что углы  $\angle(l_1, l_2), \angle(l_2, l_3), \angle(l_3, l_1)$  либо все острые, либо все прямые, либо все тупые.

### Задачи на вычисление

36. Правильная четырехугольная пирамида вписана в сферу радиуса  $R$ . Угол между двумя смежными боковыми ребрами пирамиды равен  $\alpha$ . Найдите высоту пирамиды.

37. В сферу радиуса  $R$  вписана правильная треугольная пирамида. Плоский угол при вершине боковой грани равен  $\alpha$ . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

38. Дан тетраэдр  $ABCD$  с прямыми плоскими углами при вершине  $D$ . Найдите площадь грани  $ABC$ , если  $DA = a, DB = b$  и  $DC = c$ .

39. Одно ребро тетраэдра равно  $b$ , а каждое из остальных равно  $a$ . Найдите объем тетраэдра.

40. Вычислите объем тетраэдра  $ABCD$ , если  $AD = BC = a, BD = AC = b, CD = AB = c$ .

41. Длина одного бокового ребра четырехугольной пирамиды равна  $x$ , все остальные ребра имеют длину, равную 1. Выразите объем пирамиды как функцию  $x$ . При каком значении  $x$  объем пирамиды имеет наибольшее значение?

# ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

## I. Обозначения

### Треугольник

Стороны треугольника  $ABC$  обозначаются:  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ , а его углы — буквами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

$h_a, h_b, h_c$  — высоты;  $m_a, m_b, m_c$  — медианы;  $l_a, l_b, l_c$  — биссектрисы, проведенные соответственно из вершин  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ;

$2p$  — периметр треугольника;

$S$  — площадь треугольника;

$R$  — радиус описанной окружности;

$r$  — радиус вписанной окружности;

$H$  — точка пересечения высот (ортоцентр) треугольника;

$M$  — точка пересечения медиан (центроид) треугольника;

$O$  — центр описанной окружности;

$J$  — центр вписанной окружности.

### Четырехугольник

Стороны четырехугольника  $ABCD$  обозначаются:  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$ ;

$e$  и  $f$  — диагонали  $AC$  и  $BD$ ;

$2p$  и  $S$  — периметр и площадь четырехугольника.

### Тетраэдр

Длины ребер тетраэдра  $ABCD$  обозначаются так:  $DA = a$ ,  $DB = b$ ,  $DC = c$ ,  $BC = a_1$ ,  $CA = b_1$ ,  $AB = c_1$ .

$S_1, S_2, S_3, S_4$  — площади граней, противоположащих соответственно вершинам  $A, B, C, D$ ;

$h_1, h_2, h_3, h_4$  — высоты тетраэдра;

$m_1, m_2, m_3, m_4$  — медианы тетраэдра, проведенные соответственно из вершин  $A, B, C, D$  (медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий его вершину с центроидом противоположной грани);

$V$  — объем тетраэдра;

$R$  — радиус описанной сферы;

$r$  — радиус вписанной сферы.

## II. Формулы

### Метрические соотношения в треугольнике

$$1. S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$2. h_a = \frac{2S}{a};$$

$$3. m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4};$$

$$4. l_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)};$$

$$5. R = \frac{abc}{4S}; \quad R = \frac{ab}{2h_c};$$

$$6. r = \frac{S}{p};$$

$$7. AH^2 = 4R^2 - a^2;$$

$$8. OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2);$$

$$9. Al = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}};$$

$$10. Ol = \sqrt{R^2 - 2Rr};$$

$$11. h_a = b \sin C = c \sin B;$$

$$12. m_a = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A};$$

$$13. l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2};$$

$$14. r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2};$$

$$15. S = \frac{1}{2} ab \sin C;$$

$$16. \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};$$

$$17. \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

$$18. 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{p}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\frac{1}{2} \sin A \sin B \sin C}} =$$

$$= \frac{h_a}{\sin B \sin C} = \frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}};$$

$$19. 1 + 4 \cos A \cos B \cos C = -(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) = 3 - 2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) \leq \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \leq \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

$$20. 4 \sin A \sin B \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$21. \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \geq \frac{1}{3} \left( \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right) = \frac{1}{3} \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \times$$

$$\times \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \geq \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}.$$

### Метрические соотношения в четырехугольнике

22.  $a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = 2ef \cos \varphi$ , где  $\varphi = \angle AOB$ ,  $O$  — точка пересечения диагоналей.

$$23. S = \frac{1}{2} ef \sin \varphi;$$

$$24. S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{A+C}{2}.$$

$$25. e^2 f^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cos (A + C).$$

$$26. ef \leq ac + bd.$$

### Метрические соотношения в тетраэдре

$$27. h_i = \frac{3V}{S_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

$$28. m_4^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{9};$$

29.  $R = \frac{T}{6V}$ , где  $R$  — радиус сферы, описанной около тетраэдра, и  $T$  — площадь треугольника, стороны которого численно равны  $aa_1$ ,  $bb_1$ ,  $cc_1$ .

$$30. r = \frac{3V}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}.$$

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
-----------------------	---

## П Л А Н И М Е Т Р И Я

### Г л а в а I. Аффинные задачи

<i>Основные теоретические сведения . . . . .</i>	5
<i>Примеры решения аффинных задач . . . . .</i>	12
§ 1. Параллельность прямых и пропорциональность отрезков . . . . .	17
§ 2. Площади . . . . .	20
§ 3. Геометрические места точек . . . . .	22

### Г л а в а II. Метрические задачи

<i>Основные теоретические сведения . . . . .</i>	23
<i>Примеры решения метрических задач . . . . .</i>	30
§ 4. Перпендикулярность . . . . .	37
§ 5. Вычисление расстояний и углов . . . . .	39
§ 6. Метрические соотношения . . . . .	41
§ 7. Геометрические неравенства. Наибольшие и наименьшие значения . . . . .	44
<i>Ответы, указания, решения . . . . .</i>	47

## С Т Е Р Е О М Е Т Р И Я

### Г л а в а I. Аффинные задачи

<i>Основные теоретические сведения . . . . .</i>	119
<i>Примеры решения аффинных задач . . . . .</i>	121
§ 1. Параллельность и пропорциональность в пространстве . . . . .	125
§ 2. Объемы . . . . .	127

### Г л а в а II. Метрические задачи

<i>Основные теоретические сведения . . . . .</i>	129
<i>Примеры решения метрических задач . . . . .</i>	131
§ 3. Перпендикулярность в пространстве . . . . .	135
§ 4. Вычисление расстояний и углов . . . . .	137
<i>Ответы, указания, решения . . . . .</i>	138
<i>Разные задачи . . . . .</i>	166
<i>Основные обозначения и формулы . . . . .</i>	170

Учебное издание

Серия «Когда сделаны уроки»

*Готман Эдгар Готлибович*

*Скопец Залман Алтерович*

## **ЗАДАЧА ОДНА — РЕШЕНИЯ РАЗНЫЕ**

Для старшего школьного возраста

Заведующая редакцией математики *О. П. Бондаренко*. Редактор *Л. Л. Розумова*. Литературный редактор *А. С. Кривошея*. Художественный редактор *В. А. Пузанкевич*. Технический редактор *М. С. Губарь*. Корректор *Л. В. Калюжная*

ИБ № 5871

Сдано в набор 16.06.87. Подписано в печать 07.04.88. БФ 05575. Формат 60×90/16. Бумага кн.-журн. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 11. Усл. кр.-отт. 11,37. Уч.-изд. л. 11,26. Тираж 100 000 экз. Изд. № 320033. Заказ № 7-380 Цена 45 к.

Издательство «Радянська школа»  
252053, Киев, Ю. Коцюбинского, 5

Книжная фабрика им. М. В. Фрунзе, 310057, Харьков-57, ул. Донец-Захаржевского, 6/8.

## КНИЖНАЯ ПОЛКА

В издательстве «Радянська школа» в 1988 году выходят:

**Балк М. Б., Балк Г. Д., Полухин А. А. Реальные применения мнимых чисел.**— 11 л.— 55 к.

Книга занимательно и доступно повествует о том, как вошли в математику комплексные числа и стали основой мощного аппарата для решения многочисленных практических задач в физике, механике, электротехнике, геодезии, картографии. Описаны также важнейшие обобщения комплексных чисел: алгебра и геометрия кватернионов, гиперкомплексные числа и матрицы.

**Гайштут А. Г. Калькулятор — твой помощник и соперник в играх.**— 10 л.— 60 к.

В книге раскрываются принципы устройства и работы программируемых микрокалькуляторов типа «Электроника БЗ-34», как простейших микроЭВМ. Даются основные сведения о вычислениях и программировании на микрокалькуляторе, предлагаются разнообразные практические и игровые задачи, эффективно решаемые с его помощью. Микрокалькулятор в процессе решения этих задач выступает и как помощник человека в устном счете, и как контролирующее устройство, и как датчик случайных чисел, и как равноправный соперник в игре.

**Иванов Б. С. Електронні саморобки.**— 12 арк. (Серія «Юному техніку».)— 40 к.

У книжці розповідається про те, як виготовити найпростіші електронні прилади, зокрема радіоприймач, домашній телефон, підсилювач, електронні ігри тощо. Даються поради, як «читати» радіосхеми, підбирати і перевіряти радіодеталі, налагоджувати прилади.

**Иващенко С. Д. Сборник шахматных комбинаций.**— 14 л.— (Серия «Когда сделаны уроки».)— 55 к.

Книга содержит 185 карточек с учебными примерами, систематизированными по заданиям, которые расположены по степени возрастания сложности.



Ку ж е л ь О. В. **Контрприкладі в математиці.**— 8 арк.— (Серія «Коли зроблено уроки»).— 25 к.

У книжці аналізуються закони побудови правильних математичних означень та тверджень і розкривається роль контрприкладів (незаперечних фактів, які спростовують те чи інше міркування) у виявленні та осмисленні різного роду логічних помилок, що можуть виникнути на основних етапах такої побудови.

Р о м а н о в с к и й Т. Б. **Микрокалькуляторы в рассказах и играх.**— 10 л.— 60 к.

В книге в форме коротких рассказов излагается недавнее прошлое карманных ЭВМ, повествуется об их сегодняшних применениях, а также о перспективных возможностях этих простейших компьютеров; объясняется азбука программирования; приводятся занимательные задачи и игры с соответствующими алгоритмами и программами их решения с помощью микрокалькулятора.

Т а б о р о в Б. В. **Основи ендшпіля.**— 8 арк.— (Серія «Коли зроблено уроки»).— 25 к.

Книжка знайомить юного читача з найпростішими теоретичними закінченнями, які найчастіше зустрічаються у практичній шаховій грі.

*Видавництво «Радянська школа»*

